a.a. 2014-15

Logica e algoritmi per i licei

Elio Giovannetti
Dipartimento di Informatica
Università degli Studi di Torino

1. Introduzione alla logica proposizionale: tavole di verità.

versione 16 febbraio 2015

L'ambiente di e-learning

Corsi di Laurea in Informatica – Orientamento

Algoritmica per i licei

http://orientamento.educ.di.unito.it/course/view.php?id=49

http://orientamento.educ.di.unito.it/course/view.php?id=49

Per poter seguire con profitto i corsi è necessario iscriversi: potete farlo tramite il vostro account su un social network (facebook, google, ecc.).

Ambiente unico per tutte le scuole del progetto:

copie delle slides, materiale multimediale, esercizi e compiti, forum, blog, ecc.

Algoritmi e logica.

Che cos'è un algoritmo?

Un algoritmo è una procedura di calcolo ben definita che prende in ingresso un certo dato o insieme di dati, e genera in uscita un dato o insieme di dati costituente il risultato.

O anche:

Un algoritmo è una sequenza finita di istruzioni (comprendente eventualmente istruzioni di ripetizione, di decisione, ecc.) eseguendo la quale si ottiene, a partire dai dati in ingresso, il risultato in un numero finito di passi elementari.

Il procedimento di calcolo deve poter essere eseguito meccanicamente, senza alcuna creatività, senza "pensare".

I procedimenti di calcolo in colonna per le quattro operazioni, imparati alla scuola elementare, sono algoritmi.

Il procedimento eseguito da Google per trovare il percorso più corto o più veloce fra due località è un algoritmo.

Meccanica e macchine.

Proprio perché il calcolo è un procedimento meccanico, si presta ad essere eseguito con l'ausilio di strumenti inventati allo scopo, cioè con l'ausilio di macchine:

- dall'antico abaco al pallottoliere,
- dalla macchina addizionatrice di Pascal
  alla macchina moltiplicatrice di Leibniz
- dal calcolatore meccanico di Babbage ai nostri computer

Il ragionamento è una forma di calcolo?

- Aristotele fu il primo (in Occidente) che si dedicò ad uno studio esplicito delle forme corrette di ragionamento.
- Anche il ragionamento corretto sembra caratterizzato dalla conformità a regole meccaniche, dunque meccanizzabile.
- È un caso che il termine greco

  logos (latino verbum, ratio)

  volesse dire sia *parola*, *ragione*, che *rapporto fra numeri*? In inglese il rapporto fra due quantità si dice ancora oggi *ratio*.
- Nel corso della storia è stata sempre presente la percezione di una analogia fra ragionamento e calcolo aritmetico, ed è quindi naturale che si sia sviluppata l'idea di una possibile riduzione del ragionamento a una qualche specie di calcolo: da cui, poi, ottenere una meccanizzazione del ragionamento.

Thomas Hobbes, 1588 –1679

Il ragionamento è una forma di calcolo?

Hobbes, a metà del '600:

"ragionare non è nient'altro che fare dei conti",

perché

"come gli studiosi di aritmetica insegnano ad addizionare e sottrarre coi numeri, e i geometri insegnano la stessa cosa con le linee, le figure, gli angoli [...], così i logici insegnano la stessa cosa con le conseguenze delle parole, sommando insieme due nomi per costruire una proposizione, e due proposizioni per costruire un sillogismo, e molti sillogismi per costruire una dimostrazione; ..."

Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646 –1716

Leibniz

Matematico, filosofo, fisico, ingegnere, politico, sinologo … , genio universale, anche noto per il suo ottimismo ("questo è il migliore dei mondi possibili"), su cui si esercitò il sarcasmo di Voltaire nel Candide.

Immaginò di poter riuscire a definire un linguaggio simbolico universale, la characteristica universalis, con associato un calculus ratiocinator, cioè un insieme di regole di un calcolo logico, attraverso cui si potessero esprimere tutte le possibili argomentazioni corrette.

Anzi, Leibniz probabilmente pensava che si potesse costruire a tale scopo una macchina logica, analoga alla macchina per effettuare le moltiplicazioni che lui stesso aveva inventato.

Essendo appunto un visionario ottimista, immaginò che tutte le dispute si sarebbero potute risolvere col calcolo logico!

Il ragionamento è una forma di calcolo?

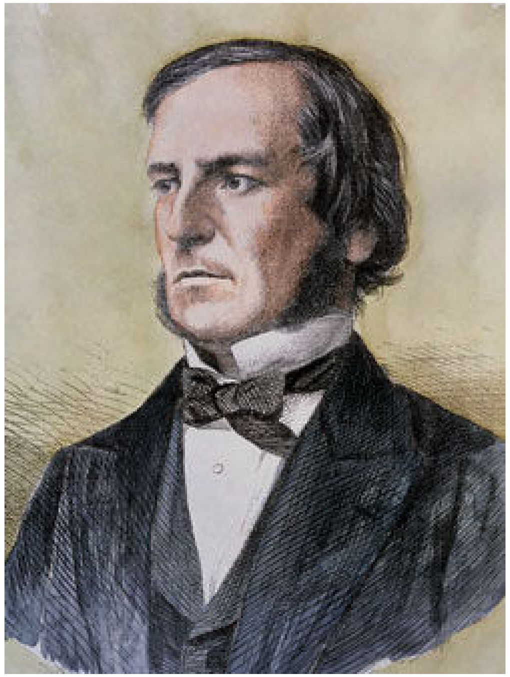
Leibniz, 1677:

"Il est manifeste, que si l’on pouvoit trouver des caractères ou signes propres à exprimer toutes nos pensées aussi nettement et exactement que l’arithmétique exprime les nombres ou que l’analyse geométrique exprime les lignes, on pourroit faire en toutes les matières autant qu'elles sont sujettes au raisonnement tout ce qu’on peut faire en Arithmétique et en Géométrie."

Ancora Leibniz:

"Quo facto, quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abacos, et sibi mutuo (accito si placet amico) dicere: calculemus!"

Il ragionamento è una forma di calcolo? Dal Seicento all'Ottocento.



George Boole, 1815 –1864

Il ragionamento è una forma di calcolo?

George Boole, The Laws of Thought (Le leggi del pensiero), Cork (Inghilterra), 1854.

È considerato il fondatore della logica proposizionale: il calcolo logico inventato da Boole può essere visto come un calcolo analogo a quelli aritmetici, fondato su un tipo ben preciso di strutture matematiche che vengono dette, in suo onore, algebre di Boole.

Ancora oggi, in tutti i linguaggi di programmazione ("tipati") esiste un tipo di dato che si chiama boolean, che è costituito da due elementi: true e false.

Affrontiamo lo studio di tale logica secondo gli approcci che sono oggi usuali.

Logica proposizionale

- Fin dai tempi di Aristotele, la logica è la scienza che cerca di stabilire quali siano le forme corrette di ragionamento, cioè come da certe assunzioni o premesse si possano ricavare delle conclusioni, in modo che se le premesse sono vere, le conclusioni siano sicuramente vere.
- La logica proposizionale studia le forme di ragionamento che non dipendono dai componenti interni delle proposizioni elementari, ma solo dal significato di particelle come la congiunzione "e", la disgiunzione "o", ecc., quando esse sono usate per connettere proposizioni elementari.
- La logica proposizionale quindi non analizza una proposizione elementare, ad es. "la neve è bianca", o "tutti i triangoli equilateri sono equiangoli", in termini di soggetto, predicato, complementi, ecc. ma la considera come un'espressione atomica (cioè indivisibile) che può essere vera o falsa.

La congiunzione.

- La congiunzione "e" in logica è intesa nel suo significato più di base, diversamente dalle lingue naturali in cui può avere diverse sfumature di significato, ad esempio indicare una successione temporale: "scrisse un messaggio e lo spedì".
- La proposizione composta "la neve è bianca e tutti i triangoli equilateri sono equiangoli" è vera perché le proposizioni componenti "la neve è bianca" e " tutti i triangoli equilateri sono equiangoli" sono vere (attenzione alle virgolette!).
- Le proposizioni composte
  "Roma è la capitale d'Italia e Ivrea si trova in Lombardia"
  "Londra è la capitale d'Italia e Ivrea si trova in Piemonte"
  "Londra è la capitale d'Italia e Ivrea si trova in Lombardia"
  sono tutte false, perché una o entrambe le componenti di ciascuna di esse sono false. Invece:

"Roma è la capitale d'Italia e Ivrea si trova in Piemonte" è vera.

La congiunzione: notazione.

- Poiché la lingua universale della scienza e dell'informatica è l'inglese, la congiunzione viene spesso indicata con "and".
- Nel '900 in logica è stato introdotto il simbolo $\wedge$, che comunque leggiamo abitualmente and (almeno in Italia).
- In alcuni testi o contesti la congiunzione è denotata dal simbolo & ("e commerciale"); in molti linguaggi di programmazione è denotata dal simbolo && (doppia "e commerciale").
- Attenzione: quale sia il simbolo per indicare la congiunzione logica è assolutamente irrilevante. L'importante è sceglierne uno e usare sempre quello, senza mescolare notazioni diverse in uno stesso testo.
- Noi useremo la notazione $\wedge$, che è quella standard in logica.

Tavole (o tabelle) di verità.

Usando delle lettere latine maiuscole per indicare proposizioni atomiche, e lettere greche per indicare proposizioni generiche, possiamo allora dire che la proposizione $\alpha \wedge \beta$ è vera se e solo se α è vera e β è vera, e in tutti gli altri casi è falsa.

Possiamo rappresentare tale banalità per mezzo di una tabella, dove F sta per falso (ingl. false) e T sta per vero (ingl. true):

α	β	$\alpha \wedge \beta$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Valori di verità e operatori logici.

- In quanto precede non vi è nulla che non sia ovvio. Facciamo tuttavia un altro piccolo passo.
- Consideriamo le abbreviazioni T ed F come due nuovi "valori", cioè come una nuova specie di "numeri", costituita da due soli elementi.
- Consideriamo il simbolo $\wedge$ come un simbolo di operazione di nuovo tipo, analogo agli operatori aritmetici $\times$ e $+$: un operatore logico.
- Possiamo allora riscrivere la tabella precedente come una sorta di "tabelline" (o "tavola pitagorica") di nuovo tipo, per un insieme di due valori; invece di $2\times1 = 2$, $2\times2 = 4$, $2\times3 = 6$, …:

$$F \wedge F = F$$
$$F \wedge T = F$$
$$T \wedge F = F$$
$$T \wedge T = T$$

La "aritmetica" (o meglio, l'algebra) della logica.

Per accentuare l'analogia con l'aritmetica ordinaria, indichiamo il falso con 0 e il vero con 1, e indichiamo la congiunzione con il simbolo della moltiplicazione o prodotto. Le "tabelline" della congiunzione diventano allora:

$$0 \times 0 = 0$$
$$0 \times 1 = 0$$
$$1 \times 0 = 0$$
$$1 \times 1 = 1$$

che, tra l'altro, sono anche valide nell'aritmetica ordinaria!

Nei nostri computer il vero e il falso, così come le cifre 0 e 1, sono rappresentati da due livelli di voltaggio, alto e basso; i circuiti dell'unità logico-aritmetica sono in grado di eseguire tanto le operazioni aritmetiche che le operazioni logiche.

Linguaggi di programmazione e operazioni.

- In tutti i linguaggi di programmazione vi sono operatori aritmetici e logici, e simboli relazionali come $<$, $>$, $=$, ecc.
- Attenzione: nei linguaggi di programmazione i simboli $<$, $>$, $=$ sono considerati anch'essi operatori come $+$, $\times$, $\wedge$, di un tipo ancora diverso: sono operatori che, come $+$ e $\times$, prendono come operandi dei numeri, ma danno come risultato, invece di un numero, un valore di verità. Si ha così, ad esempio:

$$2 \times 3 \rightarrow 6$$
$$2 > 3 \rightarrow F$$
$$2 < 3 \rightarrow T$$
$$2 = 3 \rightarrow F$$
$$\ldots$$

Così l'espressione $2 < 3$ non è "sbagliata", è semplicemente un'espressione (proprio come $2+3$) di cui possiamo calcolare il valore, e tale valore è false.

"Che cos'è la verità?" (Ponzio Pilato)

- Benché quanto precede possa sembrare una serie di ovvietà, è importante notare il diverso "sguardo" che così si ottiene sulla antica nozione di verità.
- Il Vero e il Falso, da elevati e magari difficili concetti filosofici, diventano semplicemente due entità analoghe ai numeri, i "valori di verità" o "booleani" (dal logico George Boole), con i quali si possono fare operazioni simili a quelle aritmetiche.
- Con la nascita e lo sviluppo dei computer, i valori di verità e le operazioni con essi si materializzano in circuiti elettronici.
- Per un ingegnere elettronico intorno alla metà del '900, una "logica" non era una teoria filosofica o matematica, ma un chip, un circuito a transistori, che si comprava nei negozi di hardware (ferramenta).

Gli altri connettivi proposizionali

Connettivi proposizionali: la disgiunzione.

La disgiunzione "o" in logica è intesa in senso non esclusivo: le tre proposizioni sottostanti:

"Roma è la capitale d'Italia o Ivrea si trova in Lombardia"

"Londra è la capitale d'Italia o Ivrea si trova in Piemonte"

"Roma è la capitale d'Italia o Ivrea si trova in Piemonte"

sono tutte vere, perché in ognuna di esse una o entrambe le componenti sono vere.

Invece:

"Londra è la capitale d'Italia o Ivrea si trova in Lombardia"

è falsa perché entrambe le componenti sono false.

La disgiunzione viene indicata, a seconda dei contesti, con i simboli or, | , || , +, $\vee$.

La notazione standard in logica, che seguiremo, è $\vee$.

La tavola di verità per la disgiunzione.

La tavola di verità per la disgiunzione è quindi la seguente:

α	β	α ∨ β
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Nella notazione "aritmetica" la disgiunzione è indicata con "+" e chiamata "somma logica". Le sue "tabelline" sono quindi:

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

La negazione

Nella logica moderna la particella "non" (in ingl. "not") si usa solo per negare un'intera proposizione; non la si può usare per negare qualcosa che non sia una proposizione, ad esempio un attributo, o un complemento, ecc.

La negazione di un predicato o di un altro elemento sintattico nelle lingue naturali può essere di solito facilmente espresso mediante la negazione logica, ma occorre fare attenzione.

La particella "non" va quindi intesa intuitivamente come

"non si dà il caso che", "non è vero (!) che", ecc.

La negazione viene indicata, a seconda dei contesti, con i simboli not, !, ~, ¬, o talvolta con la sopralineatura.

La notazione standard in logica, che seguiremo, è ¬, che si legge "not" all'inglese, o "non" all'italiana e alla francese.

La negazione: esempi nelle lingue naturali.

- La negata della proposizione "Paolo ama Francesca" è la proposizione "Paolo non ama Francesca", perché questa ha lo stesso senso di "non è vero che Paolo ama Francesca": in questo caso negando il verbo si nega l'intera proposizione.
- La negata della proposizione "tutti gli italiani sono disonesti" non è "tutti gli italiani non sono disonesti", che è una (brutta) frase equivalente a "nessun italiano è disonesto",

  bensì "non tutti gli italiani sono disonesti", che equivale a "non è vero che tutti gli italiani sono disonesti".
- A proposito della varietà e ambiguità delle lingue naturali, si noti che invece in francese la proposizione "tous les Italiens ne sont pas malhonnêtes" vuol proprio dire "non tutti gli italiani sono disonesti" !

Ma di questo genere di frasi ci occuperemo quando studieremo la logica dei predicati.

La tavola di verità per la negazione.

La tavola di verità per la negazione è quindi banale:

a	¬ a
F	T
T	F

Nella notazione "aritmetica" la negazione è spesso indicata con "~", e la sua "tabellina" è semplicemente:

$$\sim 0 = 1$$
$$\sim 1 = 0$$

Con i tre "operatori booleani" *and*, *or*, e *not* si delinea quindi già una sorta di "algebra del pensiero".

Parentesizzazione e precedenza in aritmetica

In aritmetica, le espressioni contenenti più operatori sarebbero ambigue:

$$5 + 3 \times 7$$

L'ambiguità viene risolta, come sappiamo, tramite l'uso delle parentesi e le regole di precedenza:

$(5 + 3) \times 7$ (= 56) è diverso da $5 + (3 \times 7)$ (= 26).

Poi si adotta la convenzione che il $\times$ ha la precedenza sul $+$, e che quindi $5 + (3 \times 7)$ si può scrivere senza parentesi, mentre in $(5 + 3) \times 7$ le parentesi sono necessarie.

Nelle lingue naturali vi possono essere frasi corrette che sono ambigue, come "Luigi guarda la ragazza col binocolo" o "they are flying kites"; l'ambiguità è in genere risolta dal contesto.

Nei linguaggi logici, invece, l'ambiguità viene risolta come in aritmetica, per mezzo di parentesi e regole di precedenza.

Parentesizzazione e precedenza in logica

La frase italiana

Aldo scia e Leo prepara cena o Ada dorme

è ambigua; in logica la sua analoga viene disambiguata per mezzo di parentesi. La proposizione

(Aldo scia e Leo prepara cena) o Ada dorme

è diversa dalla proposizione

Aldo scia e (Leo prepara cena o Ada dorme)

Poi, come in aritmetica, si stabilisce che la congiunzione ha la precedenza sulla disgiunzione, e che quindi

Aldo scia e Leo prepara cena o Ada dorme

equivale a

(Aldo scia e Leo prepara cena) o Ada dorme

La congiunzione come il $\times$, la disgiunzione come il $+$!

Parentesizzazione e precedenza in logica

$(A \wedge B) \vee C$ è diverso da $A \wedge (B \vee C)$

Nella proposizione $(A \wedge B) \vee C$ le parentesi si possono anche omettere, ma non è vietato – soprattutto per i principianti – tenerle.

Anche per gli operatori logici $\wedge$ e $\vee$, come per quelli aritmetici $\times$ e $+$, vale inoltre la proprietà associativa: così come

$(a + b) + c$ ha lo stesso valore di $a + (b + c)$

e quindi le parentesi possono essere omesse,

anche le proposizioni $(A \vee B) \vee C$ e $A \vee (B \vee C)$ ovviamente hanno lo stesso significato, e quindi le parentesi si possono omettere. La stessa cosa vale per l'operatore $\wedge$.

Le proposizioni scritte nella forma simbolica come qui sopra vengono anche dette formule logiche (proposizionali) o formule booleane, o, brevemente, formule.

Come si costruisce la tavola di verità di una formula composta.

Consideriamo ad es. la formula $A \vee (B \wedge C)$.
Per costruirne la tavola di verità dobbiamo esaminare tutte le possibili attribuzioni di valori di verità (in logica si dice piuttosto assegnazioni di valori di verità) alle componenti atomiche A, B, e C, e per ognuna di esse calcolare il valore risultante.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
F	F	F		
F	F	T		
F	T	F		
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Come si costruisce la tavola di verità di una formula composta.

Consideriamo ad es. la formula $A \vee (B \wedge C)$.
Per costruirne la tavola di verità dobbiamo esaminare tutte le possibili attribuzioni di valori di verità (in logica si dice piuttosto assegnazioni di valori di verità) alle componenti atomiche A, B, e C, e per ognuna di esse calcolare il valore risultante.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
F	F	F	F	
F	F	T		
F	T	F		
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Come si costruisce la tavola di verità di una formula composta.

Consideriamo ad es. la formula $A \vee (B \wedge C)$.
Per costruirne la tavola di verità dobbiamo esaminare tutte le possibili attribuzioni di valori di verità (in logica si dice piuttosto assegnazioni di valori di verità) alle componenti atomiche A, B, e C, e per ognuna di esse calcolare il valore risultante.

A	B	C	B ∧ C	A ∨ (B ∧ C)
F	F	F	F	F
F	F	T		
F	T	F		
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Come si costruisce la tavola di verità di una formula composta.

Consideriamo ad es. la formula $A \vee (B \wedge C)$.
Per costruirne la tavola di verità dobbiamo esaminare tutte le possibili attribuzioni di valori di verità (in logica si dice piuttosto assegnazioni di valori di verità) alle componenti atomiche A, B, e C, e per ognuna di esse calcolare il valore risultante.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F		
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Come si costruisce la tavola di verità di una formula composta.

Consideriamo ad es. la formula $A \vee (B \wedge C)$.
Per costruirne la tavola di verità dobbiamo esaminare tutte le possibili attribuzioni di valori di verità (in logica si dice piuttosto assegnazioni di valori di verità) alle componenti atomiche A, B, e C, e per ognuna di esse calcolare il valore risultante.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	F	F
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Come si costruisce la tavola di verità di una formula composta.

Consideriamo ad es. la formula $A \vee (B \wedge C)$.
Per costruirne la tavola di verità dobbiamo esaminare tutte le possibili attribuzioni di valori di verità (in logica si dice piuttosto assegnazioni di valori di verità) alle componenti atomiche A, B, e C, e per ognuna di esse calcolare il valore risultante.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Come si costruisce la tavola di verità di una formula composta.

Consideriamo ad es. la formula $A \vee (B \wedge C)$.
Per costruirne la tavola di verità dobbiamo esaminare tutte le possibili attribuzioni di valori di verità (in logica si dice piuttosto assegnazioni di valori di verità) alle componenti atomiche A, B, e C, e per ognuna di esse calcolare il valore risultante.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Come si costruisce la tavola di verità di una formula composta.

Consideriamo ad es. la formula $A \vee (B \wedge C)$.
Per costruirne la tavola di verità dobbiamo esaminare tutte le possibili attribuzioni di valori di verità (in logica si dice piuttosto assegnazioni di valori di verità) alle componenti atomiche A, B, e C, e per ognuna di esse calcolare il valore risultante.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	T	F	T
T	T	F	F	T
T	T	T	T	T

Da quante righe è composta una tavola di verità?

Da quante righe è composta la tavola di verità di una formula contenente n formule atomiche distinte $A_1, A_2, \ldots A_n$?

(Nota: ognuno degli atomi può anche comparire più volte in una formula, ad es. $A \wedge (B \vee \neg A) \wedge \ \ldots$: quindi il numero n di atomi distinti può essere minore della lunghezza della formula).

La A_1 può essere falsa o vera: per ciascuno dei due valori la A_2 può a sua volta essere falsa o vera, quindi sono $2 \times 2 = 4$ casi.

Per ognuno di questi 4 casi A_3 può essere falsa o vera, quindi ci sono in tutto $4 \times 2 = 8$ casi.

E così via: per n atomi distinti ci saranno 2^n casi (righe).

Attenzione: non confondere 2^n con n^2!

n^2 è l'onesta funzione-quadrato, il cui valore si quadruplica quando la n si raddoppia;

2^n è la spaventosa funzione esponenziale, il cui valore si raddoppia quando la n aumenta di 1.

n	n^2		2^n	
10:	10^2	$= 100$	2^{10}	$= 1024$
20:	20^2	$= 400$	2^{20}	$= 1.048.576$
30:	30^2	$= 900$	2^{30}	$\cong 10^9$
100:	100^2	$= 10.000$	2^{100}	$\cong 10^{30}$
1000:	1000^2	$=$ un milione	2^{1000}	$\cong 10^{300}$
. . .		. . .		. . .

Il numero stimato di particelle elementari dell'universo è $\sim 10^{80}$, 2^{1000} (cioè 10^{300}) è un numero inconcepibile …

Come generare tutte le combinazioni di n booleani

Un programmino Python.

Una funzione ausiliaria che estrae un singolo bit dal numero n

```
def testBit(n, offset):
  mask = 1 << offset
  return(n & mask)

def scriviTavola(n):
  for i in range(2**n):
    for k in range(n):
      print(bool(testBit(i, n-k-1)), end = " ")
    print()
```

Conseguenza logica
(canzone dei Matia Bazar? noo!)

Date una o più proposizioni come premesse o assunzioni, quali proposizioni possiamo ricavarne come conseguenze?

Un esempio super-banale: supponiamo che si voglia affermare che in un appartamento c'è sempre qualcuno, perché c'è Aldo che studia oppure c'è Leo che fa i compiti aiutato da Ada, o entrambe le cose. Supponiamo di descrivere tale situazione tramite la proposizione composta

Aldo studia **o** **(** Leo fa i compiti **e** Ada aiuta Leo**)**

Una delle conseguenze logiche banali di tale proposizione è

Aldo studia **o** Ada aiuta Leo

In forma simbolica: una conseguenza di $A\vee(B\wedge C)$ è $(A\vee C)$

(Altre conseguenze sono Aldo studia o Leo fa i compiti,
(Aldo studia o Leo fa i compiti) e (Aldo studia o Ada aiuta Leo))

Verifica di conseguenze.

C'è un metodo (meccanico) per verificare se una formula è conseguenza di una data premessa, o di date premesse?

Basta applicare la ovvia definizione vista all'inizio:

Che cosa vuol dire che una proposizione (atomica o composta) β è conseguenza logica di una proposizione α o più in generale di un insieme di proposizioni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$?

Vuol dire che se le premesse $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono vere, allora la conclusione β è necessariamente vera; per indicare in modo conciso tale fatto si scrive

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \beta$$

Allora basta costruire una tabella dei valori di verità e verificare se le attribuzioni di valori di verità alle componenti atomiche che rendono vere le premesse rendono vera la conclusione.

Vediamo alcuni esempi nelle slides seguenti.

Conseguenza logica e tavole di verità.

Iniziamo con un esempio con una sola premessa: vogliamo verificare se $(A \vee C)$ è conseguenza logica di $A \vee (B \wedge C)$.

Dobbiamo allora fare una tabella di tutte le possibili attribuzioni di valori di verità (*) alle componenti atomiche A, B, e C:

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$
F	F	F		
F	F	T		
F	T	F		
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

(*) in logica si usa dire piuttosto *assegnazioni* di valori di verità.

Conseguenza logica e tavole di verità.

Poi, per ogni possibile assegnazione di valori di verità ad A,B,C, cioè per ogni riga della tabella, calcoliamo il valore di verità della premessa col metodo indicato prima (ricopiamo dalla slide 39, senza riportare la colonna intermedia):

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$
F	F	F	F	
F	F	T	F	
F	T	F	F	
F	T	T	T	
T	F	F	T	
T	F	T	T	
T	T	F	T	
T	T	T	T	

Conseguenza logica e tavole di verità.

Poi, per ogni possibile assegnazione di valori di verità ad A,B,C, cioè per ogni riga della tabella, calcoliamo con lo stesso metodo il valore di verità della conclusione (in questo caso particolare basta applicare la tavola della disgiunzione):

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	T
F	T	F	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

Conseguenza logica e tavole di verità.

Infine, consideriamo tutte le righe nelle quali la premessa è vera, e controlliamo se in ognuna di esse è vera anche la conclusione:

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	T
F	T	F	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

Conseguenza logica e tavole di verità.

Infine, consideriamo tutte le righe nelle quali la premessa è vera, e controlliamo se in ognuna di esse è vera anche la conclusione: sì, è proprio così!

$(A \vee C)$ è conseguenza logica di $A \vee (B \wedge C)$

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	T
F	T	F	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

Un procedimento (algoritmo) più efficiente.

Nel costruire la tabella, appena nella colonna della premessa otteniamo il valore F, non calcoliamo il valore della conclusione ma passiamo subito alla riga successiva …

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$
F	F	F		
F	F	T		
F	T	F		
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Un procedimento (algoritmo) più efficiente.

Nel costruire la tabella, appena nella colonna della premessa otteniamo il valore F, non calcoliamo il valore della conclusione ma passiamo subito alla riga successiva …

A	B	C	A ∨ (B ∧ C)	A ∨ C
F	F	F	F	
F	F	T		
F	T	F		
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Un procedimento (algoritmo) più efficiente.

Nel costruire la tabella, appena nella colonna della premessa otteniamo il valore F, non calcoliamo il valore della conclusione ma passiamo subito alla riga successiva …

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$
F	F	F	F	
F	F	T	F	
F	T	F		
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Un procedimento (algoritmo) più efficiente.

Nel costruire la tabella, appena nella colonna della premessa otteniamo il valore F, non calcoliamo il valore della conclusione ma passiamo subito alla riga successiva …

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$
F	F	F	F	
F	F	T	F	
F	T	F	F	
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Un procedimento (algoritmo) più efficiente.

Nel costruire la tabella, appena nella colonna della premessa otteniamo il valore F, non calcoliamo il valore della conclusione ma passiamo subito alla riga successiva …

A	B	C	A ∨ (B ∧ C)	A ∨ C
F	F	F	F	
F	F	T	F	
F	T	F	F	
F	T	T	T	
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Un procedimento (algoritmo) più efficiente.

Nel costruire la tabella, appena nella colonna della premessa otteniamo il valore F, non calcoliamo il valore della conclusione ma passiamo subito alla riga successiva …

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$
F	F	F	F	
F	F	T	F	
F	T	F	F	
F	T	T	T	T
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Un procedimento (algoritmo) più efficiente.

Nel costruire la tabella, appena nella colonna della premessa otteniamo il valore F, non calcoliamo il valore della conclusione ma passiamo subito alla riga successiva …

A	B	C	A ∨ (B ∧ C)	A ∨ C
F	F	F	F	
F	F	T	F	
F	T	F	F	
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Un procedimento (algoritmo) più efficiente.

Nel costruire la tabella, appena nella colonna della premessa otteniamo il valore F, non calcoliamo il valore della conclusione ma passiamo subito alla riga successiva …

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$
F	F	F	F	
F	F	T	F	
F	T	F	F	
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F		
T	T	T		

Un procedimento (algoritmo) più efficiente.

Nel costruire la tabella, appena nella colonna della premessa otteniamo il valore F, non calcoliamo il valore della conclusione ma passiamo subito alla riga successiva …

A	B	C	A ∨ (B ∧ C)	A ∨ C
F	F	F	F	
F	F	T	F	
F	T	F	F	
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T		

Un procedimento (algoritmo) più efficiente.

Nel costruire la tabella, appena nella colonna della premessa otteniamo il valore F, non calcoliamo il valore della conclusione ma passiamo subito alla riga successiva …

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$
F	F	F	F	
F	F	T	F	
F	T	F	F	
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

Linguaggio e meta-linguaggio.

Abbiamo quindi verificato che $A \vee (B \wedge C) \models A \vee C$

Attenzione: il simbolo $\models$ non è un simbolo del linguaggio logico, bensì un simbolo del meta-linguaggio con il quale noi parliamo del linguaggio logico! esso esprime una relazione fra formule del linguaggio, appunto la relazione di conseguenza logica fra un insieme di premesse e una conclusione!

Nella logica matematica, le proposizioni diventano degli enti matematici come i numeri o le figure geometriche, che quindi vengono studiati con metodi matematici.
"Logica matematica" non vuol dire (o non principalmente) "logica della matematica", bensì "matematica della logica"!
Naturalmente la matematica si fonda a sua volta sulla logica … ma nei discorsi sui fondamenti una certa circolarità è inevitabile!

Linguaggio e metalinguaggio

Un altro modo di dire:

la proposizione β è conseguenza logica della proposizione α

è: la proposizione α implica la proposizione β,

che ha il vantaggio di essere più corta, e che α e β sono nello stesso ordine in cui sono scritte nella forma simbolica $\alpha \models \beta$

Esempio. La scrittura:

alzo il bicchiere o (bevo e canto) $\models$ alzo il bicchiere o canto

in forma non simbolica si scrive (attenzione alle virgolette!):

la proposizione "alzo il bicchiere o canto" è conseguenza logica della proposizione "alzo il bicchiere o (bevo e canto)"

oppure:

la proposizione "alzo il bicchiere o (bevo e canto)" implica la proposizione "alzo il bicchiere o canto".

Linguaggio e metalinguaggio: nota bene.

Le espressioni "è conseguenza logica di" e "implica" non fanno parte del linguaggio logico!

Sono espressioni del meta-linguaggio matematico con cui parliamo di espressioni del linguaggio logico, che infatti sono racchiuse fra virgolette!

Non si può scrivere:

alzo il bicchiere o bevo e canto implica alzo il bicchiere o canto

senza virgolette!

È una frase italiana sintatticamente scorretta!

La parola "implica" può però venire usata, come vedremo, anche all'interno del linguaggio logico, nella forma "implica che". Per evitare confusioni, per ora daremo la preferenza alla forma "è conseguenza logica di".

Formule atomiche e formule generiche.

Ovviamente, nell'esempio visto, la relazione di conseguenza logica

$$A \vee (B \wedge C) \models A \vee C$$

vale non solo per A, B, C formule atomiche, ma per formule generiche α, β, γ, che possono essere già formule composte di qualunque complessità:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \models \alpha \vee \gamma$$

Transitività della conseguenza logica.

Si vede facilmente che, in base alla definizione, la relazione di conseguenza logica fra due formule è transitiva:

se β è conseguenza di α, e γ è conseguenza di β,

allora γ è conseguenza di α.

Cioè:

se è $\alpha \vDash \beta$ e $\beta \vDash \gamma$, allora è $\alpha \vDash \gamma$

che è una proprietà intuitiva della nozione di conseguenza.

Conseguenza logica di più premesse.

Il metodo si applica anche nel caso di più premesse.

Esempio elementare

Premesse.

1. Aldo ha una giacca rossa o Beatrice mente.
2. Aldo non ha una giacca rossa.
3. Beatrice non mente o Caio è l'assassino.

Una delle conseguenze che si possono ricavare è:

- Beatrice mente e Caio è l'assassino

Infatti, intuitivamente, dalle prime due proposizioni si ricava che Beatrice mente; da questo e dalla 3 si ricava appunto che Caio è l'assassino; ecc.

Formalizzazione del ragionamento.

Indichiamo ogni proposizione atomica con una lettera:

A = Aldo ha una giacca rossa
B = Beatrice mente
C = Caio è l'assassino.

Le tre premesse sono:

1. $A \vee B$ = Aldo ha una giacca rossa o Beatrice mente.
2. $\neg A$ = Aldo non ha una giacca rossa.
3. $\neg B \vee C$ = Beatrice non mente o Caio è l'assassino.

La conseguenza che consideriamo è:

$B \wedge C$ = Beatrice mente e Caio è l'assassino.

In modo più formale, scriviamo:

$$A \vee B,\ \neg A,\ \neg B \vee C \models B \wedge C$$

Con il metodo delle tavole di verità controlliamo se è così.

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg B \vee C$	$B \wedge C$

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	$\neg$ B	AvB	$\neg$ A	$\neg$ B v C	B $\wedge$ C
F	**F**	**F**					

Costruzione della tabella.

atomi | | | | premesse | | | conclusione

A	B	C	$\neg$ B	AvB	$\neg$ A	$\neg$ B v C	B $\wedge$ C
F	**F**	**F**	**T**				

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	**F**	**F**	**T**	**F**			

Costruzione della tabella.

atomi | premesse | conclusione

A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**		

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	

Costruzione della tabella.

atomi | | | | premesse | | | conclusione

A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**

Costruzione della tabella.

atomi premesse conclusione

A	B	C	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg B \vee C$	$B \wedge C$
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**T**					

Costruzione della tabella.

atomi

premesse

conclusione

A	B	C	$\neg B$	$A \lor B$	$\neg A$	$\neg B \lor C$	$B \land C$
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	$\neg$ B	AvB	$\neg$ A	$\neg$ B v C	B $\wedge$ C
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**F**					

Costruzione della tabella.

atomi | premesse | conclusione

A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	F	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	F	F

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	F	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	F

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg B \vee C$	$B \wedge C$
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	F	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	F
T	F	T	T	T	F	T	F
T	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	F	T	F	T	T

Ora consideriamo tutti e soli i casi in cui le tre premesse sono tutte vere, cioè tutte e sole le righe in cui vi è T in tutte le premesse:

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	F	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	F
T	F	T	T	T	F	T	F
T	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	F	T	F	T	T

Ora consideriamo tutti e soli i casi in cui le tre premesse sono tutte vere, cioè tutte e sole le righe in cui vi è T in tutte le premesse: in questa tavola ce n'è una sola.

Costruzione della tabella.

atomi				premesse			conclusione
A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	F	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	F
T	F	T	T	T	F	T	F
T	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	F	T	F	T	T

Andiamo allora a vedere in tale riga il valore della conclusione: è anch'esso T. Quindi la conclusione è conseguenza logica delle premesse.

Anche qui, un algoritmo più efficiente.

Nel costruire la tabella, appena in una riga una delle premesse acquista il valore F, possiamo interrompere la costruzione della riga e passare alla riga successiva …

A	B	C	¬ B	AvB	¬ A	¬ B v C	B ∧ C
F	**F**	**F**	**T**	**F**			
F	**F**	**T**	**T**	**F**			
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**		
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**		
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**		
T	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**		

Esercizio 1.1

Stabilire per mezzo della tavola di verità se, date le premesse:

Ada non è russa o beve vodka.

Ada non beve vodka o mangia caviale.

Ada non mangia caviale.

la proposizione

Ada non è russa

è conseguenza logica delle premesse.

Si ponga:

A = "Ada è russa"

B = "Ada Beve vodka"

C = "Ada mangia Caviale"

Esercizio 1.2

Stabilire per mezzo della tavola di verità se date le premesse:

Carlo esce, oppure non accade che (Ada studia o Bea ride).

Carlo non esce.

la proposizione

Ada non studia e Bea non ride

è conseguenza logica delle premesse oppure no.

Si ponga:

A = Ada studia

B = Bea ride

C = Carlo esce.

Virgola e congiunzione.

Abbiamo dunque stabilito, in modo puramente meccanico, una relazione di conseguenza logica tra formule:

$$A \vee B, \neg A, \neg B \vee C \models B \wedge C$$

Si osservi, guardando la tavola di verità, che poiché contano solo le righe in cui tutte le premesse sono vere, è come se le premesse fossero tutte in congiunzione (AND) fra di loro.
La virgola è cioè una sorta di meta-congiunzione, e si ha

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \beta$ se e solo se $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \models \beta$

Un programmino Python che risolve gli esercizi

Definiamo una funzione Python la quale, date due proposizioni, stabilisce se la seconda è conseguenza logica della prima oppure no.

Per rendere il programma più semplice, richiediamo che nelle formule gli atomi vengano scritti usando, invece delle lettere A, B, C, ecc. , i simboli A[0], A[1], A[2], ecc. e scrivendo "and", "or" e "not" invece dei rispettivi simboli logici tradizionali.

Ad esempio la formula $(A \vee B) \wedge \neg A \wedge (\neg B \vee C)$ si scrive:

"(A[0] or A[1]) and not A[0] and (not A[1] or A[2])"

L'algoritmo consiste nel generare una dopo l'altra, con un ciclo for, tutte le possibili combinazioni di valori di verità (come nella funzione che scrive la tavola, slide 42), e per ciascuna di esse calcolare il valore di verità della premessa e quello della conclusione, terminando appena si trova un "controcaso".

```
def conseguenza(premessa, conclusione, n):
  A = [None]*n
  for i in range(2**n):
    for k in range(n):
      A[k] = bool(testBit(i, n-1-k))
    if eval(premessa) and not eval(conclusione):
      return False;
  return True

def testBit(n, offset):
  mask = 1 << offset
  return(n & mask)
```

Esempio di uso della funzione

```
form1 = "(A[0] or A[1]) and not A[0] and (not A[1] or A[2])"
form2 = "(A[1] and A[2])"

print(form2)
if consequenza(form1, form2, 3):
  print("è conseguenza di")
else: print("non è conseguenza di")
print(form1)
```

Esempio di uso della funzione.

Scriviamo un programmino interattivo che chiede all'utente di digitare due formule e calcola se la seconda formula è conseguenza della prima: una (molto parziale!) realizzazione del sogno di Leibniz …

```
form1 = input("digita la premessa: ")
form2 = input("digita la conclusione: ")
n = int(input("numero degli atomi: "))
print(form2)
if conseguenza(form1, form2, n):
  print("è conseguenza di")
else: print("non è conseguenza di")
print(form1)
```

Esercizio svolto: un altro esempio.

Un altro esempio super-banale: dalla premessa

Aldo scia e (Leo prepara cena o Ada dorme)

si ha come conseguenza logica la proposizione

(Aldo scia e Leo prepara cena) o (Aldo scia e Ada dorme)

Cioè da $A\wedge(B\vee C)$ si ha come conseguenza $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$:

$$A\wedge(B\vee C) \vDash (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$$

Verifichiamolo meccanicamente con il metodo appena visto.

Costruzione della tabella.

Per ogni assegnazione di valori di verità ad A,B,C, cioè per ogni riga della tabella, calcoliamo il valore di verità della premessa e quello della conclusione (facciamo il calcolo a mente, omettendo le colonne intermedie):

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
F	F	F		
F	F	T		
F	T	F		
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Costruzione della tabella.

Per ogni assegnazione di valori di verità ad A,B,C, cioè per ogni riga della tabella, calcoliamo il valore di verità della premessa e quello della conclusione (facciamo il calcolo a mente, omettendo le colonne intermedie):

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
F	F	F	F	
F	F	T		
F	T	F		
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Costruzione della tabella.

Per ogni assegnazione di valori di verità ad A,B,C, cioè per ogni riga della tabella, calcoliamo il valore di verità della premessa e quello della conclusione (facciamo il calcolo a mente, omettendo le colonne intermedie):

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
F	F	F	F	F
F	F	T		
F	T	F		
F	T	T		
T	F	F		
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Costruzione della tabella.

Per ogni assegnazione di valori di verità ad A,B,C, cioè per ogni riga della tabella, calcoliamo il valore di verità della premessa e quello della conclusione (facciamo il calcolo a mente, omettendo le colonne intermedie):

A	**B**	**C**	**A $\wedge$ (B $\vee$ C)**	**(A$\wedge$B) $\vee$ (A$\wedge$C)**
F	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**F**		
F	**T**	**T**		
T	**F**	**F**		
T	**F**	**T**		
T	**T**	**F**		
T	**T**	**T**		

Costruzione della tabella.

Per ogni assegnazione di valori di verità ad A,B,C, cioè per ogni riga della tabella, calcoliamo il valore di verità della premessa e quello della conclusione (facciamo il calcolo a mente, omettendo le colonne intermedie):

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	F	F
F	T	T	F	F
T	F	F	F	F
T	F	T		
T	T	F		
T	T	T		

Costruzione della tabella.

Per ogni assegnazione di valori di verità ad A,B,C, cioè per ogni riga della tabella, calcoliamo il valore di verità della premessa e quello della conclusione (facciamo il calcolo a mente, omettendo le colonne intermedie):

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	F	F
F	T	T	F	F
T	F	F	F	F
T	F	T	T	T
T	T	F		
T	T	T		

Costruzione della tabella.

Diversamente dagli esempi prec., qui le righe in cui la premessa è vera e la conclusione è vera sono esattamente le stesse!

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	F	F
F	T	T	F	F
T	F	F	F	F
T	F	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	T	T

Equivalenza logica

Nell'ultimo esempio, a differenza dei precedenti, scambiando i ruoli di premessa e conclusione vale ancora la relazione di conseguenza logica; si ha cioè non solo

$$A \wedge (B \vee C) \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

ma anche

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \models A \wedge (B \vee C)$$

Due proposizioni che sono ciascuna conseguenza dell'altra si dicono logicamente equivalenti fra loro.

Per indicare l'equivalenza logica usiamo il simbolo $\equiv$.
Scriviamo quindi $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

L'equivalenza logica è analoga all'uguaglianza aritmetica; se usiamo i simboli $\times$ e $+$ rispettivamente per $\wedge$ e $\vee$, otteniamo:

$$A \times (B + C) \equiv (A \times B) + (A \times C)$$

È la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma!

Esercizio 1.3 (per i più bravi)

Definisci una funzione Python

```
def sonoEquivalenti(form1, form2, numAtomi):
```

che dà come risultato True se form1 e form2 sono logicamente equivalenti, False se non lo sono, insieme ad un programma principale interattivo che permetta di provare tale funzione.

Suggerimento: bastano alcune lievi modifiche al programma di slides 90-91.

Un'altra proprietà distributiva.

Si può facilmente vedere che vale anche l'equivalenza:

$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$

che scritta con i simboli aritmetici è:

$$A + (B \times C) \equiv (A + B) \times (A + C)$$

Nella logica booleana vale anche la proprietà distributiva della somma (logica) rispetto al prodotto (logico), che invece non vale in aritmetica.

Ovviamente anche le proprietà di cui sopra valgono non solo per formule atomiche A, B, C, ma per formule generiche α, β, γ:

$$\alpha \land (\beta \lor \gamma) \equiv (\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \gamma)$$

$$\alpha \lor (\beta \land \gamma) \equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)$$

Altri connettivi

- Si possono definire altri connettivi, semplicemente prendendo come definizioni tavole di verità diverse.
- In questo modo si possono definire connettivi bizzarri, oppure connettivi utili, come la disgiunzione esclusiva (in inglese exclusive or), corrispondente al latino aut … aut … .
- Viene indicata di solito col simbolo **XOR**, oppure $\oplus$, o anche $\veebar$.
- Esercizio svolto: scrivere la tavola di verità che definisce $\oplus$.

α	**β**	**α ⊕ β**

Altri connettivi

- Si possono definire altri connettivi, semplicemente prendendo come definizioni tavole di verità diverse.
- In questo modo si possono definire connettivi bizzarri, oppure utili, come la disgiunzione esclusiva (in inglese exclusive or), corrispondente al latino aut … aut … .
- Viene indicata di solito col simbolo XOR, oppure $\oplus$, o anche $\veebar$.
- Esercizio svolto: scrivere la tavola di verità che definisce $\oplus$.

α	β	$\alpha \oplus \beta$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Formule soddisfacibili, valide, contradditorie.

Le tavole di verità considerate finora hanno nelle colonne dei risultati sia dei T che degli F; cioè in generale una formula può essere vera o falsa a seconda delle assegnazioni di valori di verità alle formule atomiche componenti.

Ad esempio $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ è, come abbiamo visto, vera in alcuni casi, falsa in altri.

Ci può essere qualche formula che risulta vera in tutti i casi, e qualche altra formula che risulta falsa in tutti i casi?

Esempi primordiali:

A	$\neg$ A	A $\vee \neg$ A
F	T	T
T	F	T

A	$\neg$ A	A $\wedge \neg$ A
F	T	F
T	F	F

Formule soddisfacibili, valide, contradditorie.

- Una formula che risulta vera per qualunque assegnazione di valori di verità si dice valida. Una formula valida viene anche detta tautologia.
  Esempio: $A \vee \neg A$ è una tautologia ("*tertium non datur*")
- Una formula che risulta falsa per qualunque assegnazione di valori di verità si dice contradditoria, o incoerente o (con un brutto ma diffuso inglesismo) inconsistente. Come è naturale, una formula contradditoria viene anche detta contraddizione!
  Esempio: $A \wedge \neg A$ è l'esempio primigenio di contraddizione.
- Una formula che risulta vera per almeno una assegnazione di valori di verità (ed eventualmente falsa per altre assegnazioni) si dice soddisfacibile, o coerente, o (con brutto ma diffuso inglesismo) consistente.

Formule soddisfacibili, valide, contraddittorie.

Quindi:

Una tautologia è un particolare genere di formula soddisfacibile.

Una formula è soddisfacibile se e solo se non è contraddittoria.

"non soddisfacibile" equivale dunque a "contraddittoria"

Una tautologia è vera (o una contraddizione è falsa) in virtù della sua forma, indipendentemente dalla verità o falsità (e quindi dal significato, dall'*interpretazione*) delle loro componenti atomiche.

Una tautologia o una contraddizione è necessariamente una proposizione composta: la verità o falsità di una proposizione atomica, come "Lea dorme" oppure "la neve è bianca", dipende dalla realtà cui la formula si riferisce, cioè dalla *interpretazione* della formula stessa.

Tautologie, contraddizioni, e negazione.

Poiché una tautologia è una formula che nella sua colonna ha tutti T, la negata di una tautologia ha nella sua colonna tutti F, ed è quindi una contraddizione; ovviamente vale il viceversa: la negata di una contraddizione è una tautologia.

Esempio

La formula $\mathbf{A} \lor \neg\mathbf{B} \lor (\neg\mathbf{A} \land \mathbf{B})$ è una … .

A	**B**	$\mathbf{A} \lor \neg\mathbf{B} \lor (\neg\mathbf{A} \land \mathbf{B})$	$\neg(\mathbf{A} \lor \neg\mathbf{B} \lor (\neg\mathbf{A} \land \mathbf{B}))$
F	**F**		
F	**T**		
T	**F**		
T	**T**		

Esempio

La formula $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B} \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ è una tautologia.

A	B	$A \vee \neg B \vee (\neg A \wedge B)$	$\neg(A \vee \neg B \vee (\neg A \wedge B))$
F	F	T	
F	T	T	
T	F	T	
T	T	T	

Esempio

La formula $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B} \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ è una tautologia.

La formula $\neg\,(\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B} \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$ è una contraddizione.

A	B	$A \vee \neg B \vee (\neg A \wedge B)$	$\neg(A \vee \neg B \vee (\neg A \wedge B))$
F	F	T	F
F	T	T	F
T	F	T	F
T	T	T	F

Tabella riassuntiva

contradditoria $\equiv$ non soddisfacibile

cioè

soddisfacibile $\equiv$ non contradditoria

Una formula è o contradditoria o soddisfacibile.
Una formula soddisfacibile può essere o no una tautologia.

Connessione con la negazione

β è contradditoria $\equiv$ $\neg\beta$ è una tautologia;

β è una tautologia $\equiv$ $\neg\beta$ è contradditoria

Tautologie

Ricordiamo che la scrittura

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vDash \beta \text{ vuol dire:}$$

in tutti i casi in cui $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono tutte vere, anche β è vera.

Allora per indicare che β è una tautologia, cioè che:

in tutti i casi ~~in cui $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono tutte vere, anche~~ β è vera, semplicemente non scriviamo nessuna formula a sinistra del simbolo $\vDash$:

$$\vDash \beta$$

Una tautologia è, per così dire, una conseguenza logica di un insieme di premesse vuoto: è vera "di per sé".
Essa è infatti vera in tutti i casi, cioè per tutte le possibili assegnazioni di valori di verità, senza condizioni (e non solo nei casi in cui certe premesse sono vere).

Contraddizioni

La proposizione β è conseguenza di $A \wedge \neg A$ se in tutti i casi in cui $A \wedge \neg A$ è vera, anche β è vera. Ma $A \wedge \neg A$ non è vera in nessun caso, quindi la condizione affinché β sia conseguenza di $A \wedge \neg A$ è banalmente soddisfatta: la premessa non pone alcun vincolo!

A	**¬ A**	**...**	**A ∧ ¬ A**	**β**
F	**T**	**...**	**F**	**...**
T	**F**	**...**	**F**	**...**
...	**...**	**...**	**F**	**...**

Da una formula contradditoria si ha come conseguenza logica qualsiasi formula:

$$\alpha \wedge \neg \alpha \quad \models \quad \beta \qquad \text{(ex falso quodlibet)}$$

(dal falso consegue qualunque cosa, lett. "ciò che si vuole")

Il metalinguaggio dentro il linguaggio: dalla conseguenza alla freccia.

La conseguenza logica non è un connettivo!

Si noti che il simbolo $\models$, essendo un simbolo metalinguistico che indica una relazione tra formule del linguaggio, non può comparire in espressioni annidate: sarebbe scorretto scrivere

$$\alpha \models (\beta \models \gamma)$$

che letteralmente si leggerebbe:

la formula α ha come conseguenza logica "la formula β ha come conseguenza logica la formula γ".

La frase è scorretta perché:

- la nozione di conseguenza logica è definita come una relazione tra formule del linguaggio logico;
- invece la frase-conclusione $\beta \models \gamma$ non è una formula del linguaggio logico, bensì una proposizione del metalinguaggio!

Si sta confondendo linguaggio con metalinguaggio!

Tuttavia la frase, pur scorretta, ha un senso …

La conseguenza logica non è un connettivo

Peggio ancora, la scrittura $\alpha \vDash (\beta \vDash \gamma)$
cioè:

> la formula α ha come conseguenza logica "la formula β ha come conseguenza logica la formula γ".

è, a rigore, una proposizione scritta in un meta-metalinguaggio in cui si parla di una proposizione scritta in un metalinguaggio che parla di una proposizione del nostro linguaggio logico.

Anche nella lingua naturale si hanno fenomeni di questo tipo, ad es. quando in un testo si riporta fra virgolette una citazione di un testo (come un romanzo) in cui compare un discorso diretto fra virgolette. Ma il procedimento potrebbe essere ripetuto, ottenendo un meta-meta-metalinguaggio, e così via, all'infinito, come nella barzelletta "turtles all the way down".

Facciamo un passo indietro.

Consideriamo di nuovo una frase del metalinguaggio come:

agisco o (bevo e canto) ⊨ agisco o canto

$$A \lor (B \land C) \models A \lor C$$

cioè: la proposizione "agisco o (bevo e canto)" implica la proposizione "agisco o canto".

Trasformiamola nel modo seguente:

il fatto che agisco o (bevo e canto) implica che (agisco o canto)

Osserviamo che nella nuova versione non ci sono più virgolette, si tratta di una frase su un solo livello di linguaggio, che si può anche scrivere così:

se agisco o (bevo e canto) allora (agisco o canto)

Abbiamo così una nuova forma di connettivo proposizionale, composto da cinque parole (il fatto che _ implica che _) o più semplicemente da due parole (se _ allora _).

Come si vede, è bastato questo passaggio analogo a quello da discorso diretto a discorso indiretto, con l'introduzione della parolina "che" e l'eliminazione delle virgolette, per trasformare una meta-proposizione in una proposizione del linguaggio.

Per non confondere linguaggio con meta-linguaggio, usiamo per il nuovo connettivo "se-allora" o "… implica che" un nuovo simbolo, diverso da quello del meta-linguaggio: la freccia $\rightarrow$.

Esso però è davvero un connettivo del linguaggio logico solo se riusciamo a definirne una tavola di verità.

Quale proprietà deve avere tale tavola? Essa deve far sì che il connettivo esprima, <u>all'interno del linguaggio logico</u>, la relazione meta-linguistica di conseguenza logica fra proposizioni del linguaggio, in una sorta di "internalizzazione" di tale nozione.

Proprietà fondamentale della freccia

Cosa vuol dire che la formula $\alpha \rightarrow \beta$ deve esprimere all'interno del linguaggio la relazione meta-linguistica $\alpha \vDash \beta$? È possibile?

Vuol dire che se vale la relazione $\alpha \vDash \beta$ la proposizione $\alpha \rightarrow \beta$ deve essere "vera", e viceversa.

Ma cosa vuol dire che una proposizione è vera? Come abbiamo visto, la verità o falsità di una proposizione dipende in generale dalla verità o falsità degli atomi componenti … a meno che la proposizione sia una tautologia, che per definizione è vera in tutti i casi (senza bisogno di alcuna ipotesi).

Il connettivo deve quindi godere della seguente proprietà:

$$\alpha \vDash \beta \quad \text{se e solo se} \quad \vDash \alpha \rightarrow \beta$$

che si può leggere:

β è conseguenza logica di α se e solo se $\alpha \rightarrow \beta$ è una tautologia.

Proprietà fondamentale della freccia

Usando le due forme, diretta e indiretta, della costruzione con il verbo "implica", possiamo leggere la proprietà fondamentale quasi come un gioco di parole:

la proposizione α implica la proposizione β se e solo se la proposizione "il fatto che α, implica che β" è una tautologia.

In realtà è più chiara la lettura "se-allora":

la proposizione α implica la proposizione β se e solo se la proposizione "se α, allora β" è una tautologia.

$$\alpha \vDash \beta \quad \text{se e solo se} \quad \vDash \alpha \to \beta$$

La forma simbolica è però molto più chiara delle forme lettera-rie, proprio per il suo aspetto grafico-spaziale:

una formula si può portare da sinistra a destra del simbolo $\vDash$ introducendo a destra il simbolo freccia, e viceversa si può cancellare la freccia portandone l'antecedente a sinistra del $\vDash$.

Proprietà fondamentale della freccia.

Questo gioco fra linguaggio e metalinguaggio non deve stupire troppo: anche in geometria euclidea, ad esempio, assumendo che un triangolo ABC sia equilatero, si dimostra che è equiangolo, e poi si scrive come teorema:

Se un triangolo è equilatero, allora è equiangolo.

La corrispondenza con la pratica matematica sarà quindi ancora più chiara quando parleremo dei sistemi deduttivi.

La tavola di verità della freccia: una prima riga.

Ricordiamo che l'unico caso in cui una conclusione non è conseguenza logica di una premessa (ed è quindi una conclu-sione "illogica") è quando vi è qualche caso in cui la premessa è vera e la conclusione è falsa: cioè quando nella tavola di verità compare la riga:

premessa α	**conclusione** β
T	**F**

Se dunque compare una tale riga, il valore di $\alpha \to \beta$ in tale riga deve essere F, in modo che la formula $\alpha \to \beta$, contenendo nella propria colonna una riga F, non possa essere una tautologia.
Quindi deve essere:

α	β	$\alpha \to \beta$
T	**F**	**F**

La tavola di verità della freccia: le altre righe.

Se compaiono solo gli altri tre tipi di riga, cioè:

α	β
F	**F**
F	**T**
T	**T**

allora β è conseguenza di α: pertanto in tali righe il valore della formula $\alpha \rightarrow \beta$ deve essere T; così, se vi sono solo i suddetti tre tipi di righe, nella colonna $\alpha \rightarrow \beta$ si hanno tutti T e quindi la formula $\alpha \rightarrow \beta$ è, come richiesto, una tautologia.

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
F	**F**	**T**
F	**T**	**T**
T	**T**	**T**

La tavola di verità della freccia.

In conclusione, la tavola di verità della freccia è:

α	β	α → β
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Tale tavola, se presentata isolatamente, può generare perplessità nei principianti. In particolare sembra bizzarra la seconda riga:

α	β	α → β
F	T	T

secondo la quale una proposizione come

"se Torino è in Francia, Firenze è in Italia" risulta vera.

La tavola di verità della freccia.

Occorre però ricordare: se α è una proposizione composta che è sempre falsa, come $A \wedge \neg A$, da essa, come abbiamo visto, si ha come conseguenza qualunque cosa (ex falso quodlibet).
Dunque affinché la freccia goda della proprietà fondamentale

$$\alpha \vDash \beta \quad \text{se e solo se} \quad \vDash \alpha \rightarrow \beta$$

è necessario che quella riga della sua tavola di verità sia così.

Il valore di verità di una proposizione atomica dipende dalla realtà, non dalla logica, che non si occupa di verità contingenti di fatto, cioè delle proposizioni atomiche.

Ad es. la proposizione "Torino è in Francia" oggi è falsa, ma per una quindicina di anni, dal 1800 al 1814, è stata vera.

Se si applica il principio "ex falso quodlibet" agli atomi,
allora da una proposizione falsa come "Torino è in Francia"
si può dedurre sia che Firenze è in Italia, sia che non lo è.

Implicazioni annidate.

La freccia è dunque un connettivo proposizionale appartenente al linguaggio esattamente come $\wedge$ e $\vee$, e quindi, a differenza del simbolo $\models$, può come quelli comparire in formule annidate: la scrittura

$$\alpha \to (\beta \to \gamma)$$

è quindi perfettamente legittima, è una formula del linguaggio, che si può leggere, magari alternando la lettura "se-allora" con la lettura "implica che" per rendere l'italiano più comprensibile:

se α, allora se β allora γ,

oppure il fatto che α, implica che se β allora γ

oppure: se α, allora il fatto che β implica che γ

La formula esprime quindi in modo corretto ciò che avevamo tentato di esprimere con la forma "sgrammaticata" $\alpha \models (\beta \models \gamma)$

Freccia e conseguenza logica di più premesse.

Ricordando, dalla slide 88, che

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \beta$ se e solo se $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \models \beta$

abbiamo allora che:

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \beta$ se e solo se $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$

Cioè: una formula è conseguenza di un insieme di formule se e solo se la formula che esprime all'interno del linguaggio logico stesso tale relazione fra formule è una tautologia.

Riassumendo

Si ha

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \beta$$

se e solo se $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$

La relazione di conseguenza logica fra un insieme di premesse ed una conclusione si traduce in una tautologia con la freccia.

L'insieme di proposizioni $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ implica la proposizione β

se e solo se

la proposizione "se α_1 e α_2 e … e α_n allora β" è una tautologia.

Implicazione e tautologia: un esempio.

Costruiamo la tavola di verità per $A \vee (B \wedge C) \rightarrow A \vee C$, semplicemente aggiungendo alla tavola di slide 49 (o 59) una colonna, corrispondente alla formula contenente il connettivo $\rightarrow$:

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$	$A \vee (B \wedge C) \rightarrow A \vee C$
F	F	F	F	F	
F	F	T	F	T	
F	T	F	F	F	
F	T	T	T	T	
T	F	F	T	T	
T	F	T	T	T	
T	T	F	T	T	
T	T	T	T	T	

L'ultima colonna ha tutti T, la formula è una tautologia!

Implicazione e tautologia: un esempio.

Costruiamo la tavola di verità per $A \vee (B \wedge C) \rightarrow A \vee C$, semplicemente aggiungendo alla tavola di slide 49 (o 59) una colonna, corrispondente alla formula contenente il connettivo $\rightarrow$:

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee C$	$A \vee (B \wedge C) \rightarrow A \vee C$
F	F	F	F	F	T
F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

L'ultima colonna ha tutti T, la formula è una tautologia!

Esempio

Avevamo visto che dalle premesse:

1. $A \vee B$ = Aldo ha una giacca rossa o Beatrice mente.
2. $\neg A$ = Aldo non ha una giacca rossa.
3. $\neg B \vee C$ = Beatrice non mente o Caio è l'assassino.

una conseguenza logica è:

$B \wedge C$ = Beatrice mente e Caio è l'assassino.

Allora la proposizione

$$(A \vee B) \wedge \neg A \wedge (\neg B \vee C) \rightarrow (B \wedge C)$$

cioè:

"se Aldo ha una giacca rossa o Beatrice mente, e Aldo non ha una giacca rossa, e (Beatrice non mente o Caio è l'assassino), allora Beatrice mente e Caio è l'assassino"

è una tautologia.

Altri ben noti esempi di conseguenza logica/freccia.

Modus ponens

versione "conseguenza": $\alpha,\ \alpha \to \beta \models \beta$

versione "tautologia": $\models \alpha \wedge (\alpha \to \beta) \to \beta$

Modus tollens

versione "conseguenza":

$$\neg \beta,\ \alpha \to \beta \models \neg \alpha$$

versione "tautologia":

$$\models \neg \beta \wedge (\alpha \to \beta) \to \neg \alpha$$

Esercizio 1.4: verificare per mezzo delle tavole di verità.

Osservazione

- Come si vede, il simbolo $\models$ di conseguenza logica può sempre essere fatto andare all'estrema sinistra, e diventa quindi, in un certo senso, irrilevante.
- Si possono descrivere tutte le cosiddette leggi logiche per mezzo di tautologie, restando quindi all'interno del linguaggio logico.
- Il simbolo $\models$, premesso ad una formula, rimane tuttavia per indicare che quella formula è una tautologia, cioè è vera per qualunque interpretazione delle formule atomiche.

Un altro esempio

Definiamo le seguenti proposizioni atomiche:

A = Ada legge
B = il babbo è felice

Modus ponens

Assumiamo come premesse le proposizioni:

1. $A \to B$ cioè: se Ada legge, allora il babbo è felice
2. A cioè: Ada legge

una conseguenza logica è B, cioè il babbo è felice

Modus tollens

Se invece assumiamo come premesse le proposizioni:

1. $A \to B$ cioè: se Ada legge, allora il babbo è felice
2. $\neg B$ cioè: il babbo non è felice

una conseguenza logica è $\neg A$, cioè Ada non legge.

La doppia implicazione.

È comodo introdurre anche il connettivo "doppia implicazione":

Scriviamo $\alpha \leftrightarrow \beta$ come abbreviazione di $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

Come si vede immediatamente, la doppia implicazione riflette all'interno del linguaggio la nozione di equivalenza logica (che è meta-linguistica), cioè:

$$\vDash \alpha \leftrightarrow \beta \text{ se e solo se } \alpha \equiv \beta$$

Esercizio facile: scrivere la tavola di verità per il connettivo $\leftrightarrow$.

α	**β**	**α ↔ β**
F	**F**	**T**
F	**T**	**F**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

Il gioco fra la negazione e gli altri connettivi.

Come portare la negazione all'interno di una formula: leggi di de Morgan.

A quale proposizione equivale la proposizione $\neg(A \wedge B)$?

Esempio: non [si dà il caso che] (Ada suona e Lea dorme)

Qualcuno risponderà: Ada non suona e Lea non dorme.

Sbagliato!

Affinché non sia vero che Ada suona e Lea dorme, basta che una delle due componenti sia falsa, cioè che Ada non suoni o Lea non dorma (o che succedano entrambe le cose!)

Vale anche il viceversa: se Ada non suona o Lea non dorme allora non è vero che Ada suona e Lea dorme. Insomma:

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

Nella notazione "aritmetica":

$$\sim(A \times B) = \sim A + \sim B$$

Verificare la legge di de Morgan tramite le tavole

A	B	$A \wedge B$	$\neg (A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
F	F					
F	T					
T	F					
T	T					

Verificare la legge di de Morgan tramite le tavole

A	B	A ∧ B	¬ (A ∧ B)	¬ A	¬ B	¬A ∨ ¬B
F	F	F				
F	T	F				
T	F	F				
T	T	T				

Verificare la legge di de Morgan tramite le tavole

A	B	$A \wedge B$	$\neg (A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
F	F	F	T			
F	T	F	T			
T	F	F	T			
T	T	T	F			

Verificare la legge di de Morgan tramite le tavole

A	B	$A \wedge B$	$\neg (A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
F	F	F	T	T		
F	T	F	T	T		
T	F	F	T	F		
T	T	T	F	F		

Verificare la legge di de Morgan tramite le tavole

A	B	A ∧ B	¬ (A ∧ B)	¬ A	¬ B	¬A ∨ ¬B
F	F	F	T	T	T	
F	T	F	T	T	F	
T	F	F	T	F	T	
T	T	T	F	F	F	

Verificare la legge di de Morgan tramite le tavole

A	B	A ∧ B	¬ (A ∧ B)	¬ A	¬ B	¬A ∨ ¬B
F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	F	T	T
T	T	T	F	F	F	F

Verificare la legge di de Morgan tramite le tavole

A	B	$A \wedge B$	$\neg (A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	F	T	T
T	T	T	F	F	F	F

Le due colonne corrispondenti rispettivamente alle formule $\neg(A \wedge B)$ e $\neg A \vee \neg B$ sono uguali, quindi le due formule sono logicamente equivalenti.

L'altra legge di de Morgan

Per la negazione della disgiunzione vale una legge simmetrica della precedente:

non [si dà il caso che] (Ada gioca o Lea dorme)

è equivalente a

Ada non gioca e Lea non dorme.

Le due leggi di de Morgan per la negazione sono quindi:

$$\neg (\alpha \land \beta) \equiv \neg \alpha \lor \neg \beta$$
$$\neg (\alpha \lor \beta) \equiv \neg \alpha \land \neg \beta$$

In un certo senso, la negazione trasforma la congiunzione nella disgiunzione e viceversa.

Esercizio 1.5: si verifichi tramite la tavola di verità la seconda legge di de Morgan.

Augustus de Morgan

Madras (India),1806 – Londra,1871

Figlio di un ufficiale inglese residente in India ma rientrato in Inghilterra sette mesi dopo la sua nascita. Vita interessante ed infelice, vedi wikipedia.

Altre equivalenze logiche notevoli

La doppia negazione è un'affermazione:

$$\neg \neg \alpha \equiv \alpha$$

L'implicazione equivale ad una disgiunzione, poiché α implica β se e solo se α è falso oppure β è vero:

$$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg \alpha \vee \beta$$

La negata di un'implicazione è quindi una congiunzione, poiché α non implica β se e solo se α è vero e β è falso:

$$\neg (\alpha \rightarrow \beta) \equiv \alpha \wedge \neg \beta$$

Se α implica β, allora non α implica non β, e viceversa:

$$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$$

(contrapositio)

Esercizio 1.6: verifica le equivalenze tramite le tavole di verità.

Esempi di *contrapositio*

"se c'è il sole, allora Ada va a sciare"

è logicamente equivalente a

"se Ada non va a sciare, allora non c'è il sole"

"se è un poligono regolare, è inscrivibile in una circonferenza"

è logicamente equivalente a

"se non è inscrivibile in una circonferenza, non è un poligono regolare"

"se non son scemi, non li vogliamo" equivale a "se li vogliamo, sono scemi"

(quale legge logica abbiamo applicato, oltre alla contrapositio?)

Altre equivalenze logiche relative all'implicazione

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$$

Dire che α implica che se β allora γ equivale a dire che "α e β" implica γ.

Esempio:

"se c'è il sole, allora se la seggiovia funziona Ada va a sciare"

è logicamente equivalente a

"se c'è il sole e la seggiovia funziona, Ada va a sciare"

Più in generale:

$$\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\ldots (\alpha_n \rightarrow \gamma)\ldots)) \equiv (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ \ldots \alpha_n) \rightarrow \gamma$$

"se c'è il sole, allora, se la seggiovia funziona, se non fa freddo Ada va a sciare" è logicamente equivalente a

"se c'è il sole e la seggiovia funziona e non fa freddo, allora Ada va a sciare"

Tautologie riguardanti l'implicazione

$\alpha \to \alpha$ ogni formula implica se stessa (banale!)

$\alpha \to (\beta \to \alpha)$
se una formula è vera, allora è implicata da qualunque formula

$\neg \alpha \to (\alpha \to \beta)$
se una formula è falsa, allora essa implica qualunque formula

$(\alpha \to (\beta \wedge \neg \beta)) \leftrightarrow \neg \alpha$
una formula implica una contraddizione se e solo se è falsa.

ecc.

$((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$
transitività dell'implicazione, che riflette la transitività della conseguenza logica.

$(\neg \alpha \to \alpha) \to \alpha$ "consequentia mirabilis"
$(\alpha \to \neg \alpha) \to \neg \alpha$

Esercizio 1.7 (per i più bravi)

Definisci una funzione Python che, data una formula booleana e il numero di atomi distinti che essa contiene, dà come risultato True se a formula è una tautologia, False se non lo è.

```
def tautologia(formula, numAtomi):
```

Definisci una funzione Python che, data una formula booleana e il numero di atomi distinti che essa contiene, dà come risultato True se a formula è soddisfacibile, False se non lo è (cioè se è contradditoria)

```
def soddisfacibile(formula, numAtomi):
```

Nota: quale sia l'efficienza ottenibile per tale funzione è un problema legato a uno dei "7 grandi problemi matematici irrisolti del millennio", per il quale l'americano Clay Institute of Mathematics ha messo in palio un milione di dollari.

Visione insiemistica

Se consideriamo le proposizioni come insiemi di elementi di un qualche universo U, dove una proposizione A è l 'insieme degli elementi di U che godono di una proprietà A, si ha la seguente corrispondenza fra connettivi proposizionali e operazioni insie-mistiche:

congiunzione	=	intersezione	$\cap$
disgiunzione	=	unione	$\cup$
negazione	=	complemento	

La relazione di conseguenza logica corrisponde all'inclusione.

Vedi figure disegnate alla lavagna.

Osservazioni su logica e lingue naturali.

Attenzione agli errori logici!

L'implicazione non si può invertire!

Da $\alpha \rightarrow \beta$ non si ha come conseguenza $\beta \rightarrow \alpha$!

Esempio.

Da Se Joe è un cavallo, allora Joe ha la coda.

non si può ottenere come conseguenza:

Se Joe ha la coda, allora Joe è un cavallo.

Eppure questo ragionamento errato viene spesso fatto nei discorsi politici, nei discorsi da bar, ecc.
Al più si può fare la *congettura* che Joe sia un cavallo, sapendo che può rivelarsi errata, perché magari è un asino …

Attenzione agli errori logici!

L'implicazione non si può invertire!

Da $\alpha \rightarrow \beta$ non si ha come conseguenza $\beta \rightarrow \alpha$!

Esempio.

Da Se Joe è un cavallo, allora Joe ha la coda.

non si può ottenere come conseguenza:

~~Se Joe ha la coda, allora Joe è un cavallo~~.

Eppure questo ragionamento errato viene spesso fatto nei discorsi politici, nei discorsi da bar, ecc.
Al più si può fare la *congettura* che Joe sia un cavallo, sapendo che può rivelarsi errata, perché magari è un asino ….

Attenzione agli errori logici!

La negazione non è distributiva sull'implicazione!

Da $\alpha \to \beta$ non si ha come conseguenza $\neg \alpha \to \neg \beta$!

Esempio.

Da Se Joe è un cavallo, allora Joe ha la coda.

non si può ottenere come conseguenza:

~~Se Joe non è un cavallo, allora Joe non ha la coda~~.

perché, anche qui, Joe potrebbe essere un asino con la coda.

È invece corretta, come abbiamo visto, la

Contrapositio

Da $\alpha \to \beta$ si ha come conseguenza $\neg \beta \to \neg \alpha$!

In un certo senso: la negazione cambia verso alla freccia.

Da Se Joe è un cavallo, allora Joe ha la coda.

si ha come conseguenza:

Se Joe non ha la coda, allora Joe non è un cavallo.

L'ambiguità delle lingue naturali: se.

Nelle lingue naturali, il significato delle parole e delle frasi è spesso molteplice, ricco di sfumature, non perfettamente determinato.

1) "Se c'è bel tempo, Ada va a sciare."

Che cosa fa Ada se non c'è bel tempo?
Può darsi che vada lo stesso a sciare?

2) "Ada va a sciare se c'è bel tempo."

La frase 2 ha lo stesso significato della 1 ?

3) "Ada va a sciare solo se c'è bel tempo."

Nel linguaggio comune, il significato della frase 1 è ambiguo, ma forse diverso da quello delle frasi 2 e 3 i cui significati sono quasi uguali fra loro … Nell'uso ordinario della lingua il senso della congiunzione "se" è ambiguo, e assume sfumature diverse a seconda del contesto e della posizione nella frase.

Se: un altro esempio.

Consideriamo una frase analoga a

"se c'è bel tempo, Ada va a sciare"

ma presa dal linguaggio matematico:

"se un poligono è regolare, è inscrivibile in una circonferenza"

In questo caso, a differenza del precedente, è chiaro che se il poligono non è regolare, è tuttavia possibile che sia inscrivibile in una circonferenza (ad es. tutti i triangoli, anche scaleni, lo sono).

È quindi evidente che la frase precedente, che è vera, ha un significato molto diverso dalla frase:

un poligono è inscrivibile in una circonferenza solo se è regolare

che invece è falsa.

Solo se.

Dire "Ada scia solo se è bel tempo" vuol dire che

se Ada scia, deve esserci bel tempo, se no non scierebbe.

Quindi dire "Ada scia solo se è bel tempo"
equivale a dire "se Ada scia, allora è bel tempo".

Ada scia $\rightarrow$ è Bel tempo

A solo se B equivale a se A, allora B cioè $A \rightarrow B$

Invece "Ada scia se è bel tempo" viene di solito considerato, nel linguaggio della matematica, <u>diversamente dall'italiano naturale</u>, come equivalente a "se è bel tempo, allora Ada scia".

Cioè, per i matematici,

A se B equivale a se B, allora A cioè $B \rightarrow A$

Se e solo se.

Quindi la comune espressione del linguaggio matematico

A se e solo se B, spesso abbreviata in A sse B,
in inglese "A if and only if B", spesso abbreviata in "A iff B",

equivale a: se A allora B, e se B allora A

cioè alla doppia implicazione (che corrisponde all'equivalenza logica fra proposizioni del linguaggio):

$$A \leftrightarrow B$$

$$A \equiv B$$

Esempio: Ada scia se e solo se è bel tempo.

Ovviamente "A sse B" è lo stesso che "B sse A":

È bel tempo se e solo se Ada scia!

Ma …

Vi sono tuttavia dei contesti, ad esempio le definizioni, in cui anche nel linguaggio matematico (non logico) una frase della forma "A se B" è intesa proprio nel senso di "A se e solo se B".

Esempi: Un insieme ordinato si dice denso se, comunque presi due elementi ... ecc.

Un triangolo si dice equilatero se …

Ovviamente, un insieme si dice denso, o un triangolo si dice equilatero, se e solo se soddisfa alla condizione enunciata nella rispettiva definizione !

Tuttavia nelle definizioni il "solo se" viene spesso omesso, cioè lasciato implicito.

D'altra parte, la maggior parte dei matematici non sono direttamente dei logici matematici …

Conclusione e proseguimento degli incontri.

Abbiamo visto come la logica proposizionale assomiglia ad una aritmetica con due valori, dotata di operazioni analoghe alle operazioni aritmetiche, ma che obbediscono a leggi un po' diverse.

Abbiamo definito la nozione di conseguenza logica e abbiamo visto che le tavole di verità sono uno strumento che permette di calcolare in modo puramente meccanico conseguenze logiche, equivalenze, ecc.

Nelle prossime lezioni introdurremo un metodo radicalmente diverso per effettuare dei ragionamenti: quello dei sistemi di inferenza o sistemi deduttivi.

Vedremo che per la logica proposizionale si può introdurre un sistema deduttivo che risulta equivalente al metodo delle tavole di verità. Estenderemo poi tale sistema alla logica dei predicati, per la quale le tavole di verità non si possono usare.

Appendice 1.
Che cos'è la verità?

"Che cos' è la verità?" (Ponzio Pilato)

L'aggettivo "vero" e il sostantivo "verità", e i loro analoghi nelle altre lingue antiche e moderne, hanno molteplici significati.

- "vero" in italiano può significare, ad es., "autentico", cioè il contrario di "finto", "contraffatto":
  oro vero, amore vero, rolex vero, ecc.
- così "falso" può significare "finto", "contraffatto":
  falso oro, falso amore, rolex falso, ecc.
- "true" (vero) in inglese significa anche "fedele":
  But I'm always true to you, in my fashion (Ella Fitzgerald)
  (ma ti sono sempre fedele, a modo mio)
- "faux" (falso) in francese significa anche "sbagliato":
  le numéro de téléphone que tu m'as donné est faux
  (il numero di telefono che mi hai dato è sbagliato)

Logica: significato delle parole "vero" e "falso".

"True and False are attributes of speech, not of things.
And where speech is not, there is neither Truth or Falsehood."
Thomas Hobbes

Parole e cose: verità come corrispondenza coi fatti.

- La nozione di verità che interessa la logica è una proprietà di proposizioni o enunciati, cioè di particolari espressioni linguistiche, non una proprietà di "cose" in generale, se non nel senso che anche le frasi che diciamo o scriviamo sono "cose".
- Essa ha subito, nel corso della storia dall'antichità fino ai giorni nostri, numerose trasformazioni sia in filosofia che in logica, in matematica, e nelle scienze.
- Partiamo da una nozione di verità nel senso comune.
  Una proposizione (o enunciato, o asserzione) enuncia che nella realtà certe cose stanno in un certo modo:
  allora la proposizione si dice vera se nella realtà le cose stanno davvero (!) in quel modo, si dice falsa se nella realtà le cose non stanno in quel modo.
  Nella realtà le cose o stanno in quel modo oppure no, quindi una proposizione è o vera o falsa (principio di bivalenza).

Verità come corrispondenza, nella logica moderna.

- Nella logica del '900 la tradizionale nozione di verità come corrispondenza è stata ripresa dal logico Alfred Tarski:

  La proposizione "la neve è bianca" è vera
  se e solo se la neve è bianca, altrimenti è falsa.
  La proposizione "Paolo ama Francesca" è vera se e solo se Paolo ama Francesca, altrimenti è falsa.
  (Attenzione alle virgolette!)

  Il grande logico contemporaneo J.-Y. Girard l'ha chiamata "la piatta banalità della semantica[1] tarskiana".
- In realtà Tarski diede di tale nozione una definizione tecnica rigorosa per mezzo della teoria degli insiemi, e la semantica tarskiana è servita di base al grande sviluppo della logica matematica nel '900, in particolare di alcune sue aree.

(1) Nota: la semantica è la teoria del significato

Forme linguistiche e verità.

- Non tutte le espressioni linguistiche di senso compiuto sono proposizioni che enunciano che certe cose stanno in un certo modo, e per le quali quindi si può dire che sono vere o false.
- Ad esempio un ordine può essere giusto o ingiusto, eseguito o non eseguito, ma non è né vero né falso.
- Analogamente una promessa, un articolo di legge, ecc.
- In logica si chiama proposizione, o enunciato, un'espressione di cui abbia senso affermare che è vera o falsa (anche se poi magari non è noto se sia vera o falsa).
- Tuttavia, anche per "proposizioni" per cui parrebbe aver senso parlare di verità o falsità, la bivalenza può non essere ovvia.
- Ad esempio già presso i Greci si discuteva se per una proposizione con verbo al futuro, come "domani nevicherà", abbia senso dire (oggi) che è vera o falsa.

Altre culture, altri concetti?

- Secondo alcuni studiosi, nel pensiero di una grande civiltà quale quella cinese non vi è una nozione esattamente corrispondente a quella occidentale di verità.
- I Cinesi non avrebbero "l'ossessione occidentale per la (ricerca della) verità", sarebbero invece interessati a raggiungere la "saggezza", l'armonia con il mondo.
- Altri studiosi contestano l'affermazione di una radicale alterità della cultura cinese rispetto alle culture occidentali (vedasi ad esempio l'accesa polemica sviluppatosi anni fa in area francofona fra il filosofo e sinologo francese François Jullien e il sinologo svizzero Jean-François Billeter).
- La logica matematica e più in generale le scienze e le tecnologie moderne che oggi si studiano e si usano in Cina sono comunque le stesse che in tutto il mondo.

Appendice 2.
Riflessioni filosofiche su linguaggio e metalinguaggio.

qualche estratto da

J-Y. Girard, Le fantôme de la transparence, 2010

Jean-Yves Girard

La logique moderne a imaginé, à la fin du XIXe siècle, un univers de référence a priori ; ainsi Frege a-t-il expliqué que le sens (implicite) d'une proposition réfère à une dénotation (explicite). L'espace des dénotations constitue la sémantique, un mot de novlangue : en effet, l'activité sémantique consiste, la plupart du temps, à obscurcir le sens. Ce que l'on comprendra facilement :

le sens d'une proposition est contenu dans son énoncé, alors que la dénotation vit on ne sait trop où, dans un paradis thomiste à jamais inaccessible. [...]

L'explication achoppe sur l'impossibilité d'établir un rapport autre que fantasmatique entre le sens et sa dénotation : quoi que l'on fasse, on ne quitte jamais le domaine du raisonnement et on est en droit de se demander si l'espace sémantique existe réellement.

Jean-Yves Girard

Dans l'entre-deux-guerres, les logiciens polonais (Łukasiewicz, Tarski) ont récrit le paradigme sémantique avec une obstination réductionniste étrangère à l'ébauche frégéenne. […]
Tarski devait passer en revue les primitives logiques et "donner" leur sémantique : celle de la conjonction est une conjonction, celle de la disjonction une disjonction . . .
Ce qui nous ramène au Diafoirus de Molière : l'opium fait dormir à cause de sa *vertu dormitive*.
Pour éviter le reproche de lapalissade, les disciples de Tarski ont fait de la dénotation de la conjonction une méta-conjonction.
Encore un gros mot de lâché, car qu'est ce qu'une méta-conjonction ? Elle réfère, on le pressent, à une méta-méta-conjonction.
Comme dans cette blague de physiciens : le monde repose sur une tortue, qui repose sur autre tortue qui repose … finalement, il y a des tortues "all the way down". Oubliant qu'une idiotie ne gagne rien à être répétée, et encore moins transfiniment.

Jean-Yves Girard, nota a pie' pagina:

"Fuite en avant adoubée par le chosisme-léninisme ; ainsi A. Badiou, dans son concept de modèle (Maspéro, 1969) nous apprend-il que vrai et faux réfèrent à vri et fax. Renversant !"

Qui Girard si riferisce con sarcasmo al noto filosofo marxista francese Alain Badiou e a un suo libro del 1969:

"The concept of a model: an introduction to the materialist epistemology of mathematics".

In questo vecchio testo Badiou in effetti dà una presentazione abbastanza tradizionale della logica matematica, con la sua semantica basata sull'insiemistica, e ad una prima occhiata la parte tecnica non sembra nemmeno così male, a parte la trovata di inventarsi i nomi vri e fax per evidenziarne l'assenza di un significato naturale pre-esistente.

Ma oggi Girard mette in discussione proprio la distinzione sintassi/semantica, con un lavoro tecnico tutt'altro che facile.