a.a. 2014-15

Logica e algoritmi per i licei

Elio Giovannetti
Dipartimento di Informatica
Università degli Studi di Torino

2. Deduzione naturale.

versione 16/02/2015

Un sistema on-line

Alla pagina

http://proofweb.cs.ru.nl/login.php

c'è un sistema on-line per la costruzione e il controllo di derivazioni in deduzione naturale.

Lo si può utilizzare tramite il "guest login".

Esso però, come tutti i sistemi di dimostrazione assistita, non è banale da usare.

Introduzione

Il metodo delle tavole di verità, visto nelle slides precedenti, non è certo il modo in cui si svolgono i ragionamenti nella pratica matematica né nel discorso comune.

Nelle dimostrazioni matematiche, dimostrare che un enunciato è conseguenza logica di un insieme di premesse equivale a scrivere una sequenza di enunciati ognuno dei quali si ottiene dai precedenti per mezzo di regole ben definite.

Un tale sistema di regole, se specificato in modo preciso, è un sistema di deduzione o di inferenza.

Una dimostrazione scritta in modo formale secondo uno di tali sistemi viene detta derivazione.

Una dimostrazione, o anche un ragionamento nel discorso comune, in generale ha, da un punto di vista astratto, una struttura ad albero genealogico, per cui dalle premesse che sono le foglie si scende via via fino alla radice-conclusione.

Sistemi di deduzione

Un sistema di deduzione, o calcolo logico, è dunque un insieme di regole meccaniche che permette, dato un insieme di formule assunte come assiomi o premesse, di ricavare tutte le possibili conseguenze logiche di tali assiomi.

Particolarmente significativi sono i cosiddetti

sistemi di deduzione naturale

introdotti da Gentzen nel 1935:

Ich wollte zunächst einmal einen Formalismus aufstellen, der dem wirklichen Schließen möglichst nahe kommt. So ergab sich ein "Kalkül des natürlichen Schließens".

traduzione:

Volevo per prima cosa costruire un formalismo che arrivi il più vicino possibile al vero modo di ragionare. …

Gerhard Gentzen
Greifswald 1909 – Praga 1945

La sua opera ha riguardato i fondamenti della logica e della matematica, con l'introduzione della deduzione naturale e del calcolo dei sequenti. Il suo teorema di eliminazione della regola del taglio è il fondamento della moderna teoria della dimostrazione. Dal 1943 insegnò all'Università tedesca di Praga.
Nel 1945 non seguì i consigli di rifugiarsi in Germania: membro del Partito Nazista (e delle SA prima), venne arrestato dai cechi insorti, e morì di malnutrizione in un campo di prigionia sovietico.

Deduzione naturale e alberi

La deduzione naturale rappresenta la deduzione di una formula da un insieme di assunzioni come un albero di cui le foglie sono le assunzioni e la conclusione è la radice.

Le regole di deduzione, o regole di inferenza, sono le regole per mezzo delle quali si costruisce un albero.

Per indicare che dalle assunzioni $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ si è ottenuta per mezzo di un albero di deduzione una conclusione τ come radice dell'albero, scriviamo

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$$

e diciamo che da $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ si deriva o si deduce τ.

Per mantenere la forma ad albero, una stessa assunzione può comparire in più foglie, dando origine a sotto-deduzioni distinte. Vogliamo che la relazione di derivazione sia equivalente alla relazione di conseguenza logica:

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \vdash \tau \text{ se e solo se } \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \models \tau$$

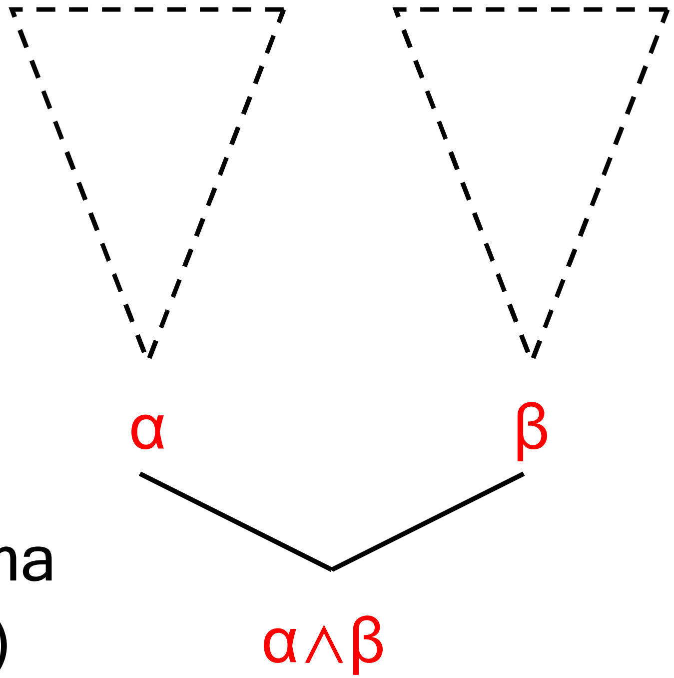
Non ridondanza delle regole.

Vogliamo cioè che il nuovo metodo sia equivalente a quello delle tavole di verità.

Come nella geometria euclidea si prendono come postulati un numero minimo di enunciati da cui tutte le proprietà delle figure geometriche si possano dedurre come teoremi, così nei sistemi di deduzione vogliamo usare un numero minimo di regole. È un principio di economia caratteristico di gran parte della scienza.

La congiunzione: regola di introduzione.

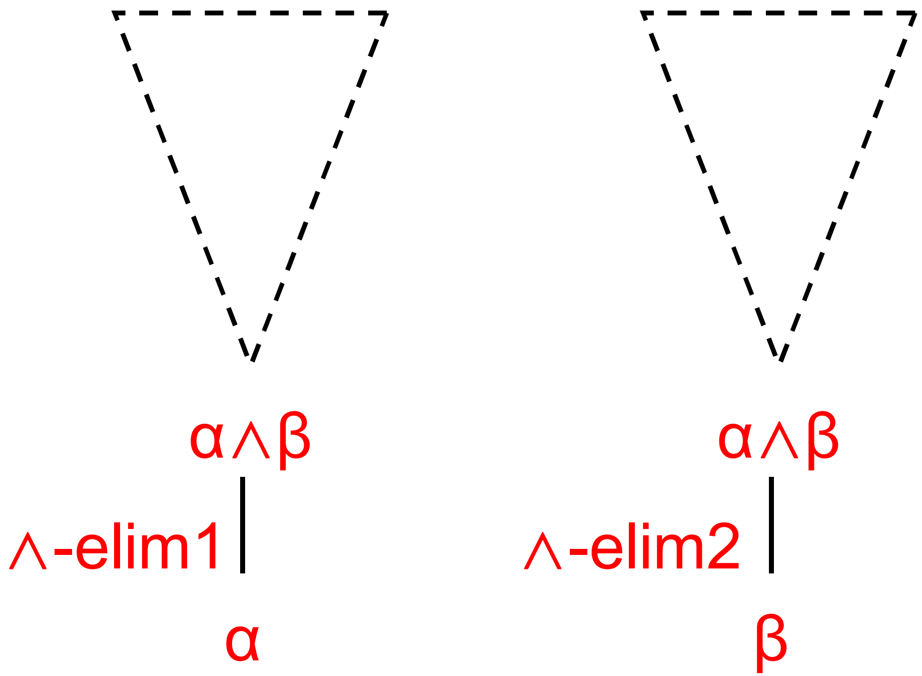
Qual è un insieme minimale di regole per la congiunzione ?
Se abbiamo dimostrato separatamente due formule α e β, la coppia di tali dimostrazioni costituisce una dimostrazione di $\alpha\wedge\beta$.
Cioè, se si sono costruiti un albero di dimostrazione per α e un albero di dimostrazione per β, si possono mettere insieme i due alberi costruendo un albero di radice $\alpha\wedge\beta$.



La regola si chiama
$\wedge$-intro(duzione)

La congiunzione: regole di eliminazione.

Se ad un certo punto della costruzione di una derivazione si è ottenuta come conclusione una congiunzione, si può scegliere come nuova conclusione uno dei due congiunti. Abbiamo quindi due regole di eliminazione.



Le regole si chiamano appunto di ∧-elim(inazione)

Congiunzione: esempio.

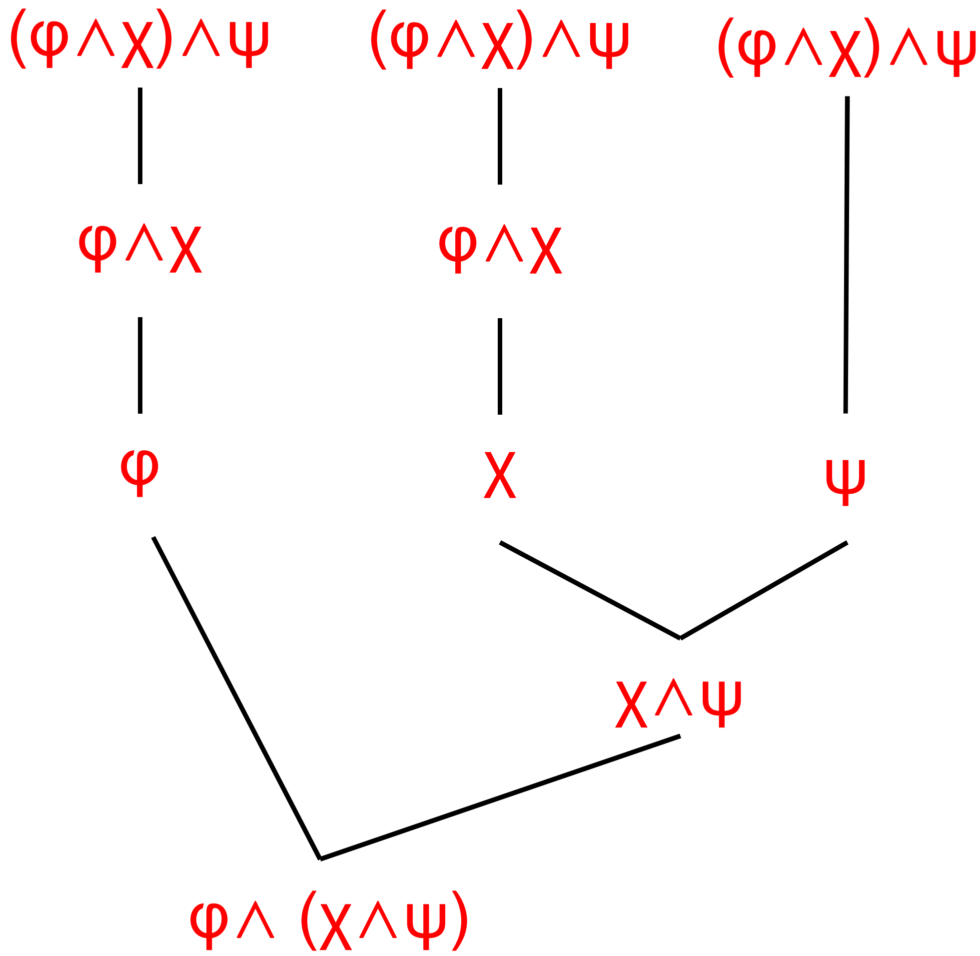
Le tre regole riportate nelle slides precedenti permettono di derivare tutte le proprietà banali della congiunzione, senza bisogno di assumerle come assiomi.

Esempio. La proprietà commutativa: $\alpha \wedge \beta \vdash \beta \wedge \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta} \qquad \dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}}{\beta \wedge \alpha}$$

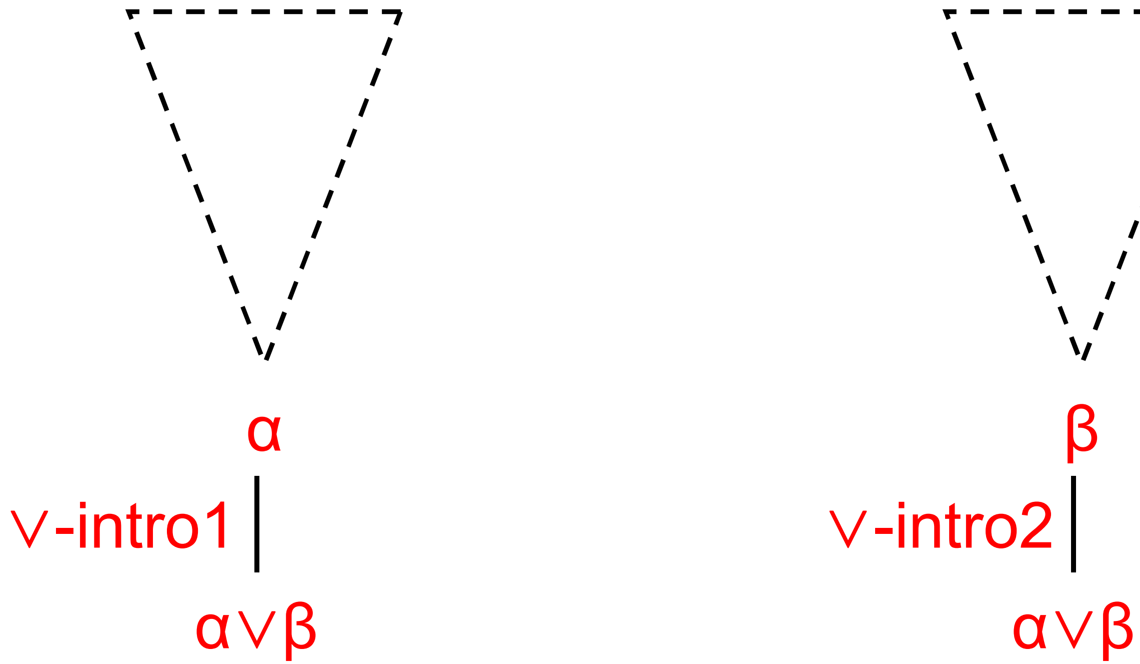
Congiunzione: altro esempio.

Una proprietà associativa: $(\varphi \wedge \chi) \wedge \psi \vdash \varphi \wedge (\chi \wedge \psi)$.



La disgiunzione: regole di introduzione.

Le regole di introduzione della disgiunzione non pongono problemi: se si ha una dimostrazione di α, si ha ovviamente una dimostrazione di $\alpha \vee \beta$, e lo stesso se si se si ha una dimostrazione di β.

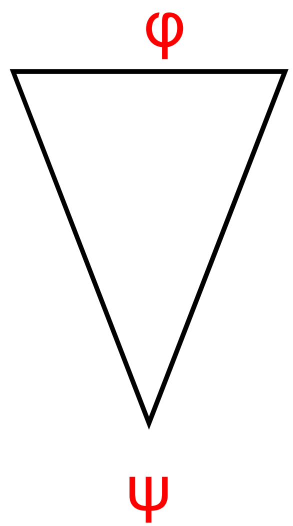


(hanno una forma simmetrica rispetto alle regole $\wedge$-elim)

L'implicazione e lo scarico delle assunzioni.

Una assunzione può venire "scaricata" tramite l'introduzione del connettivo implicazione: è la regola di introduzione della freccia, che così riflette perfettamente il significato di tale connettivo.

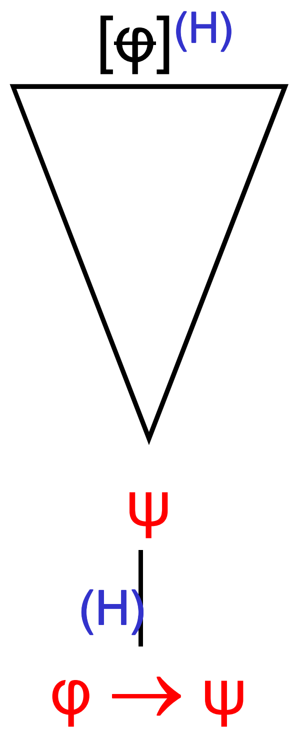
Se ψ è la radice (conclusione) di una dimostrazione che dipende da un'assunzione φ,



L'implicazione e lo scarico delle assunzioni.

Una assunzione può venire "scaricata" tramite l'introduzione del connettivo implicazione: si ha così la regola di introduzione della freccia, che così riflette perfettamente il significato di tale connettivo.

Se ψ è la radice (conclusione) di una dimostrazione che dipende da un'assunzione φ, posso introdurre una freccia e cancellare l'assunzione (in realtà la cancellazione o scarico non è obbligatoria, ma si tratta di un dettaglio tecnico).



La regola si chiama $\to$ -intro(duzione)

Esempio

La tautologia banale $A \rightarrow A \vee B$ si ottiene nel modo seguente:

- si assume A;
- da A si deduce immediatamente $A \vee B$;

$$\begin{array}{c} A \\ | \\ A \vee B \end{array}$$

Esempio

La tautologia banale $A \to A \vee B$ si ottiene nel modo seguente:

- si assume A;
- da A si deduce immediatamente $A \vee B$;
- a questo punto si "scarica" l'assunzione A introducendo la freccia nella conclusione; per indicare che l'assunzione è stata scaricata la si marca racchiudendola fra parentesi quadre (o in qualche altro modo).

$$[\cancel{A}]^{(H)}$$

$$\Big|$$

$$A \vee B$$

$$\Big| \quad \to\text{-intro}^{(H)}$$

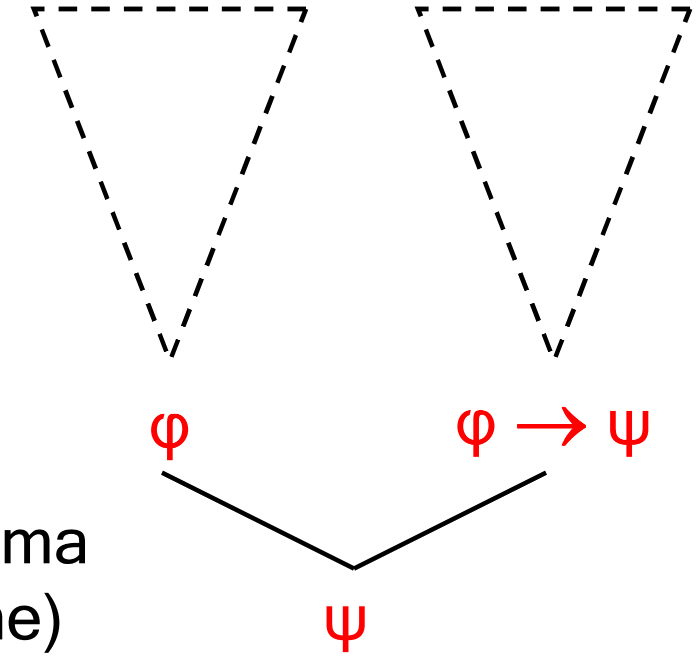
$$A \to A \vee B$$

Nell'albero finale l'assunzione (H) è scaricata, quindi la conclusione non dipende da essa; qui non dipende più da alcuna assunzione, quindi è una tautologia.

La regola di eliminazione dell'implicazione.

I sistemi di deduzione naturale sono abbastanza simmetrici: per ciascun connettivo vi sono una o due regole di introduzione e una o due regole di eliminazione.

La regola di eliminazione dell'implicazione non è altro che il modus ponens, vista però ora come parte di un sistema di deduzione appunto caratterizzato da una certa simmetria.



La regola si chiama
$\rightarrow$ -elim(inazione)

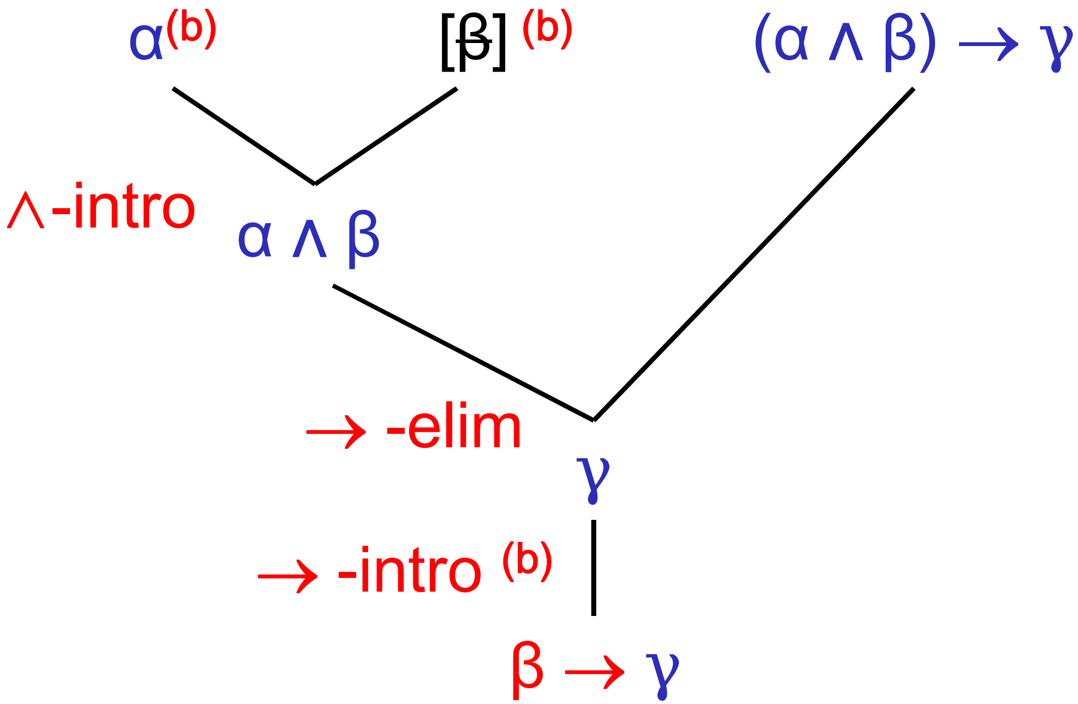
Esempio

Vogliamo derivare dall'assunzione $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$ la conseguenza $\alpha \to (\beta \to \gamma)$, usando le regole di inferenza per $\wedge$ e $\to$.

$$\dfrac{\dfrac{\alpha^{(a)} \qquad \beta^{(b)}}{\alpha \wedge \beta}\ \wedge\text{-intro} \qquad (\alpha \wedge \beta) \to \gamma}{\gamma}\ \to\text{-elim}$$

Esempio

Vogliamo derivare dall'assunzione $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$ la conseguenza $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, usando le regole di inferenza per $\wedge$ e $\rightarrow$.



Esempio

Vogliamo derivare dall'assunzione $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma$ la conseguenza $\alpha \to (\beta \to \gamma)$, usando le regole di inferenza per $\wedge$ e $\to$.

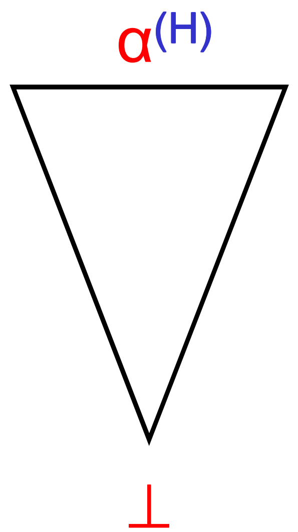
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\cancel{\alpha}]^{(a)} \qquad [\cancel{\beta}]^{(b)}}{\alpha \wedge \beta}\ \wedge\text{-intro} \qquad (\alpha \wedge \beta) \to \gamma}{\gamma}\ \to\text{-elim}}{\beta \to \gamma}\ \to\text{-intro}^{(b)}}{\alpha \to (\beta \to \gamma)}\ \to\text{-intro}^{(a)}$$

Esercizio

Costruire la derivazione in deduzione naturale dell'implicazione opposta: dall'assunzione $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ derivare $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$.

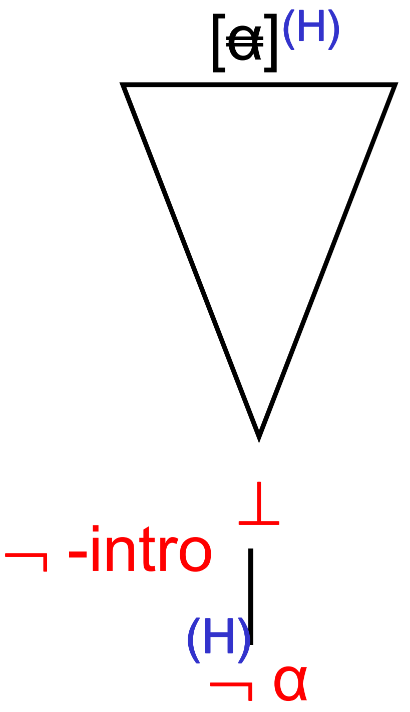
Le regole per la negazione.

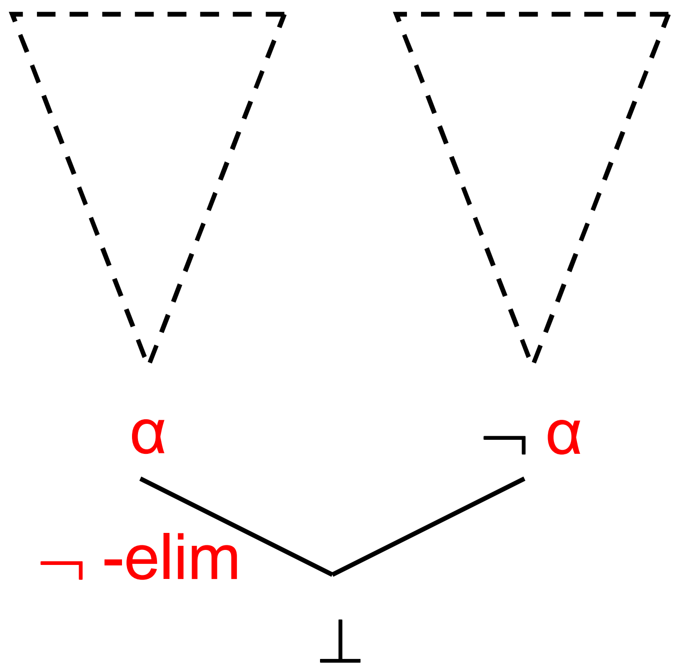
Per comodità, introduciamo un simbolo speciale per denotare la contraddizione, il falso: $\perp$.
La regola $\neg$-intro stabilisce che se da un'assunzione α si deduce una contraddizione, allora si ha una deduzione di $\neg\ \alpha$, che ovviamente non dipende più da α.



Le regole per la negazione.

Per comodità, introduciamo un simbolo speciale per denotare la contraddizione, il falso: $\perp$.
La regola $\neg$-intro stabilisce che se da un'assunzione α si deduce una contraddizione, allora si ha una deduzione di $\neg\,\alpha$, che ovviamente non dipende più da α.





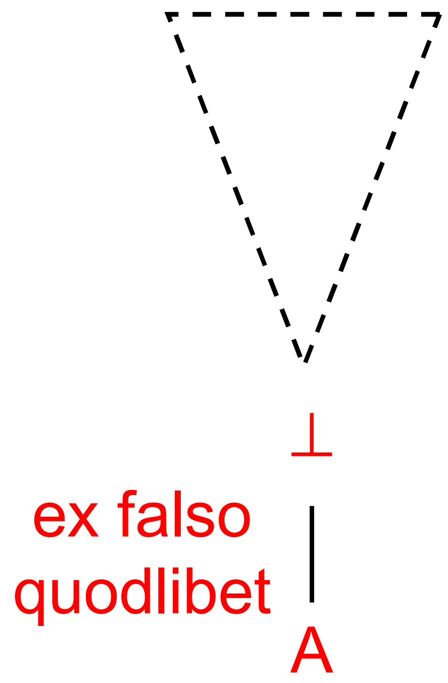
Esercizio

Costruire la derivazione in deduzione naturale di un verso della *contrapositio:*

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$$

La regola ex falso quodlibet

Dal falso, cioè dalla contraddizione, si può derivare qualunque cosa. La regola esprime il ruolo "devastante" della contraddizione: se ci si contraddice, si può affermare tutto e il contrario di tutto.



Regola di eliminazione della disgiunzione: problema!

A = Ada studia   B = Bea fa i compiti   C = Carlo cucina

Da Ada studia o (Bea fa i compiti e Carlo cucina)
una delle conseguenze è: Ada studia o Carlo cucina.
cioè

$$A \vee (B \wedge C) \models A \vee C$$

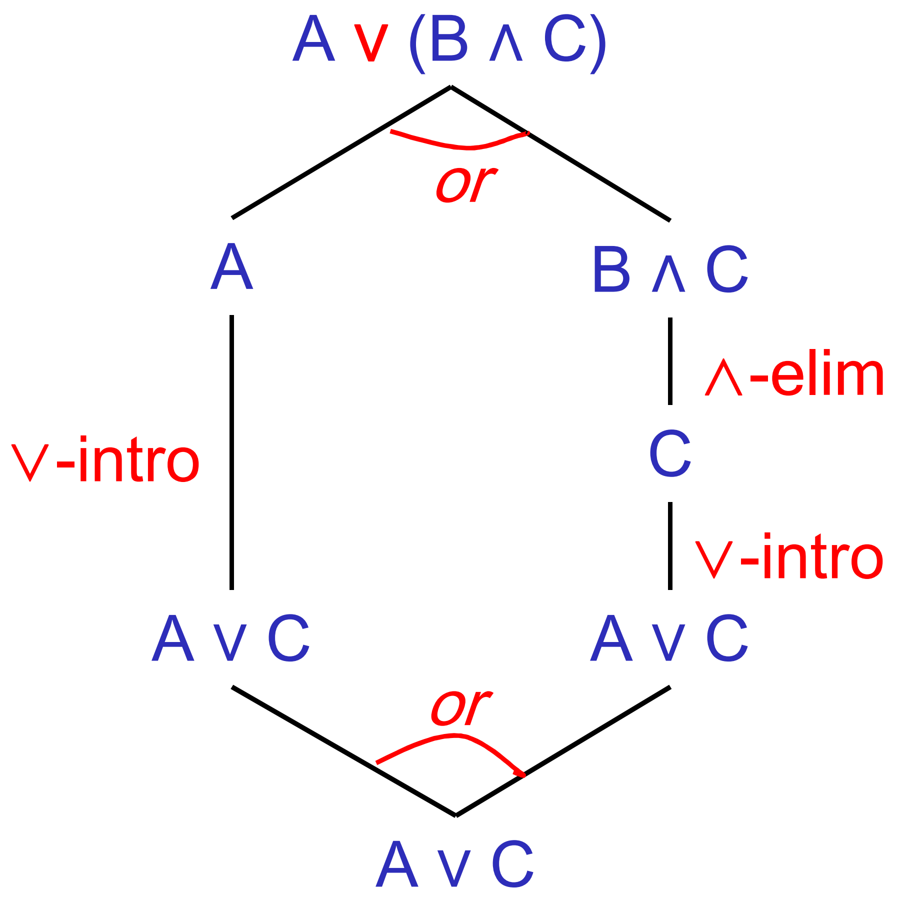
Un ragionamento naturale potrebbe essere il seguente:
se è $A \vee (B \wedge C)$, considero separatamente le due formule disgiunte A e $B \wedge C$, effettuando un ragionamento per casi.

1) Consideriamo A: da A si deriva immediatamente $A \vee C$.

2) Consideriamo $B \wedge C$: da $B \wedge C$ si deriva immediatamente C.
Da C a sua volta si deriva immediatamente $A \vee C$.

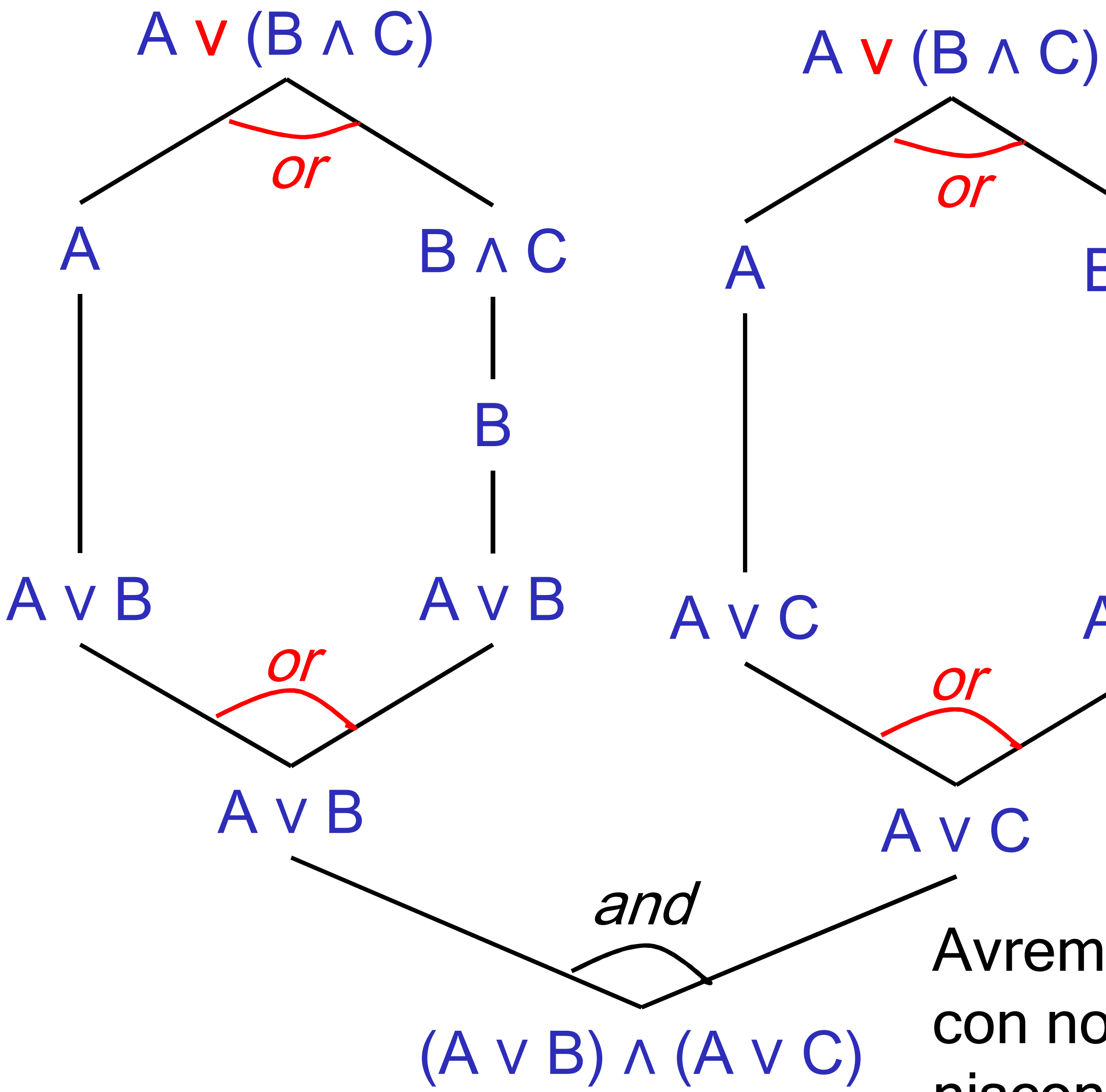
Poiché sia nel caso si assuma A, sia nel caso si assuma $B \wedge C$, si riesce a dedurre $A \vee C$, possiamo concludere che la stessa conclusione si ottiene anche dalla disgiunzione dei due casi.

In forma grafica



Ma non è un albero! Mescolare questo genere di grafico con gli alberi generati dalle regole precedenti creerebbe confusione.

Ad esempio: $A \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

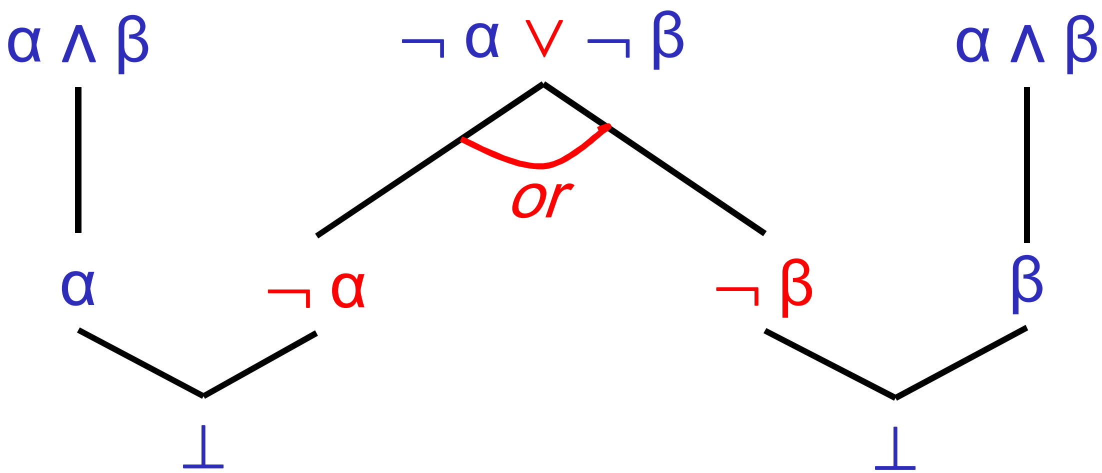


Avremmo dei grafi(ci) con nodi *or* che "riu-niscono" dei cammini.

Un altro esempio

Un verso di una delle leggi di de Morgan: $\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$

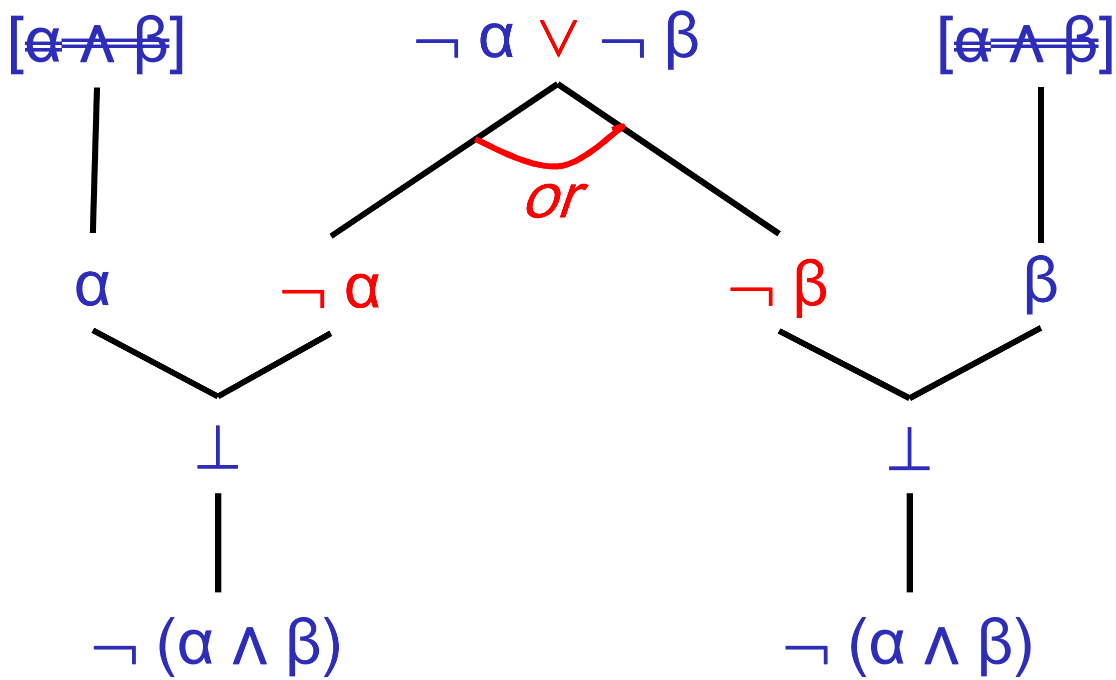
Anche qui, si fa un ragionamento per casi:



Un altro esempio

Un verso di una delle leggi di de Morgan: $\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$

Anche qui, si fa un ragionamento per casi:

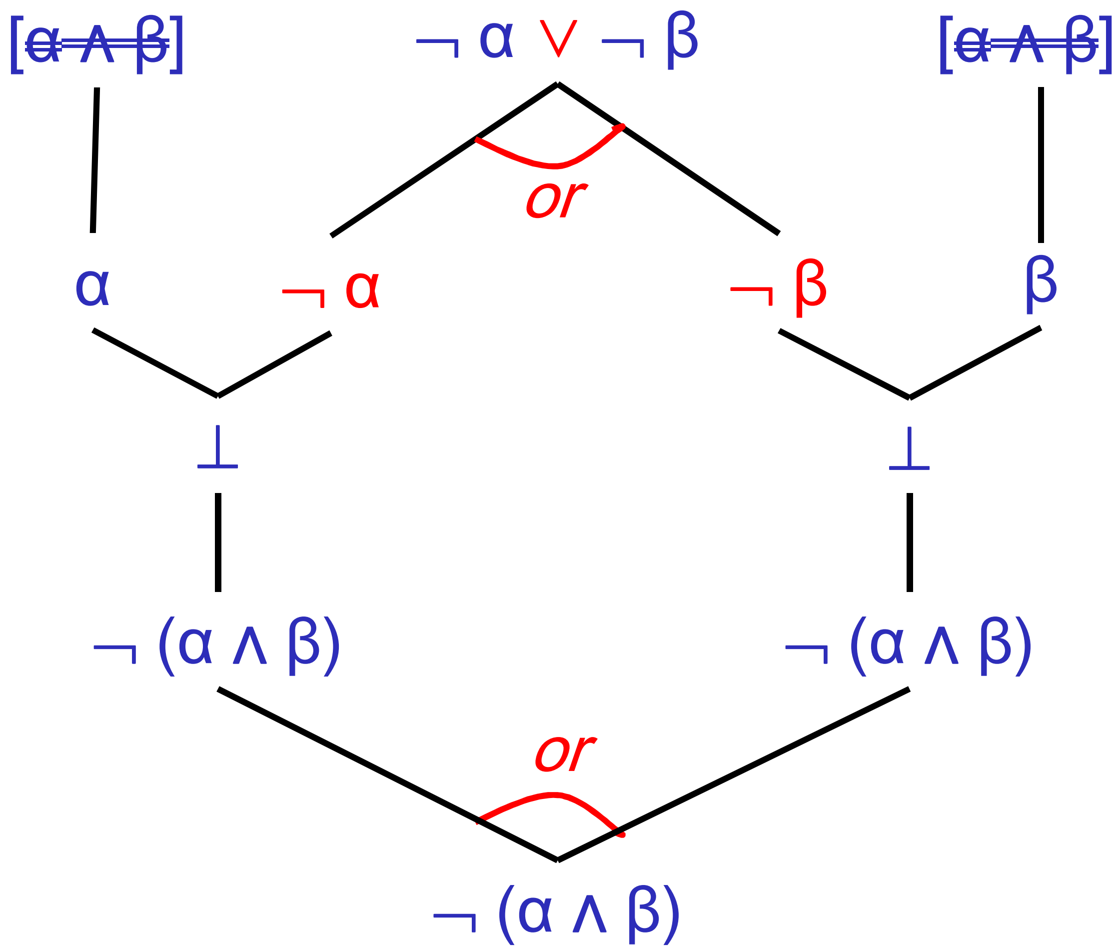


da $\neg\alpha$ si deriva $\neg(\alpha \wedge \beta)$; anche da $\neg\beta$ si deriva $\neg(\alpha \wedge \beta)$
quindi $\neg(\alpha \wedge \beta)$ è derivabile da $\neg\alpha \vee \neg\beta$

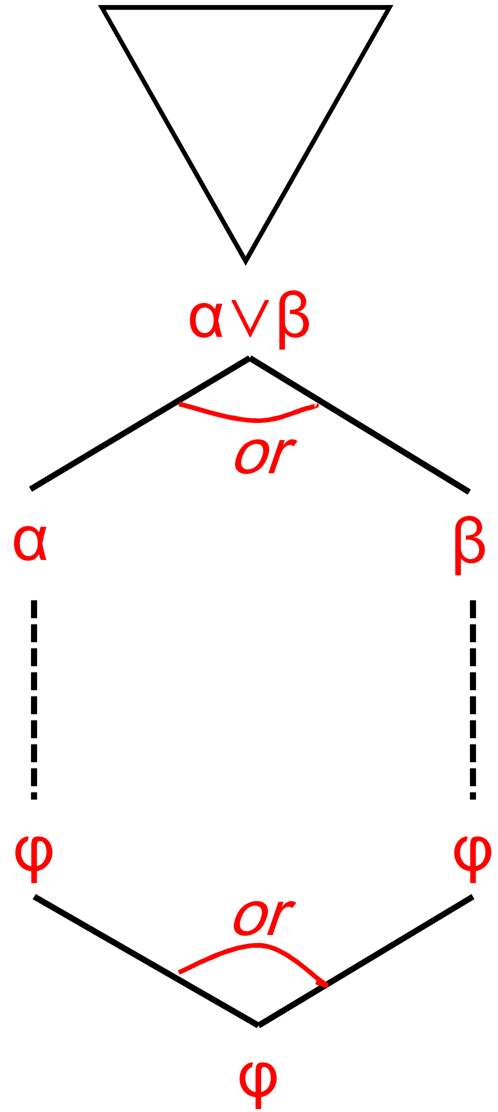
Un altro esempio

Un verso di una delle leggi di de Morgan: $\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$

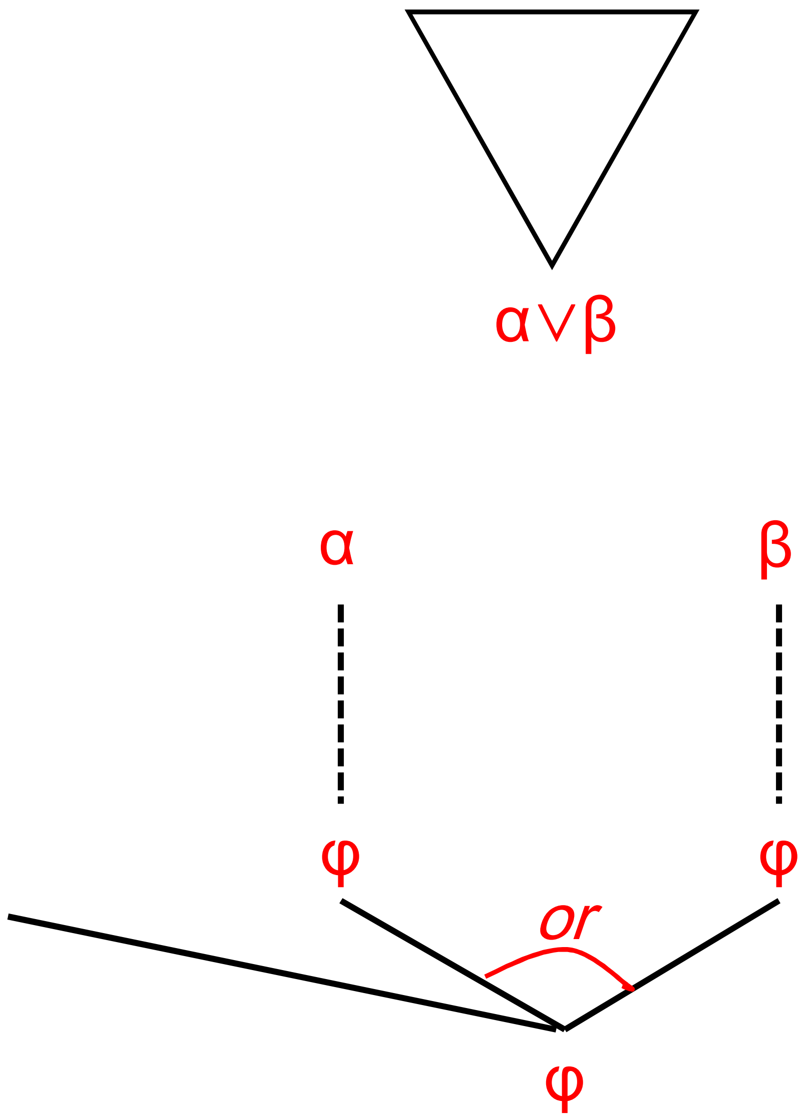
Anche qui, si fa un ragionamento per casi:



Una generica derivazione che usa ("elimina") l'OR.

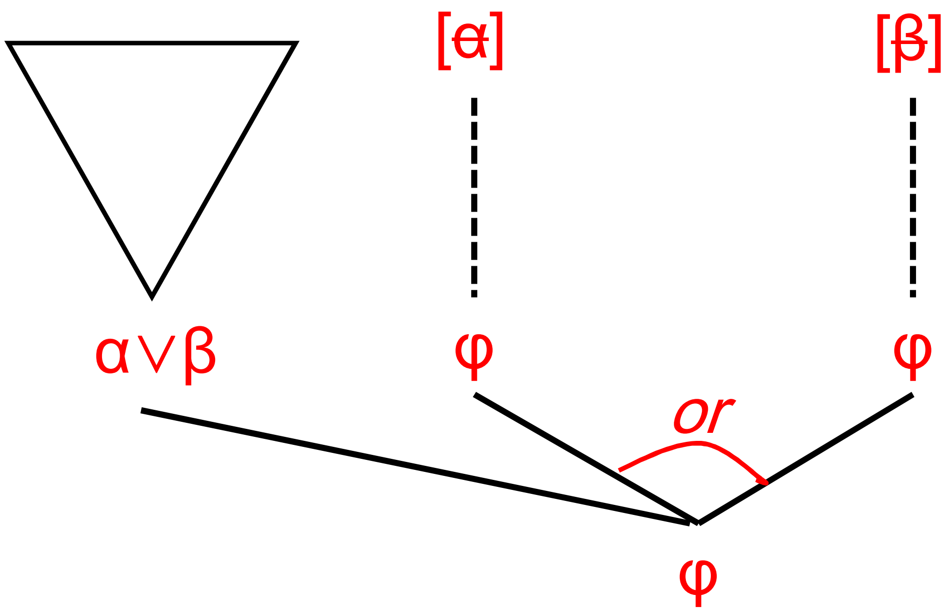


Trasformiamolo in un albero nel modo seguente:



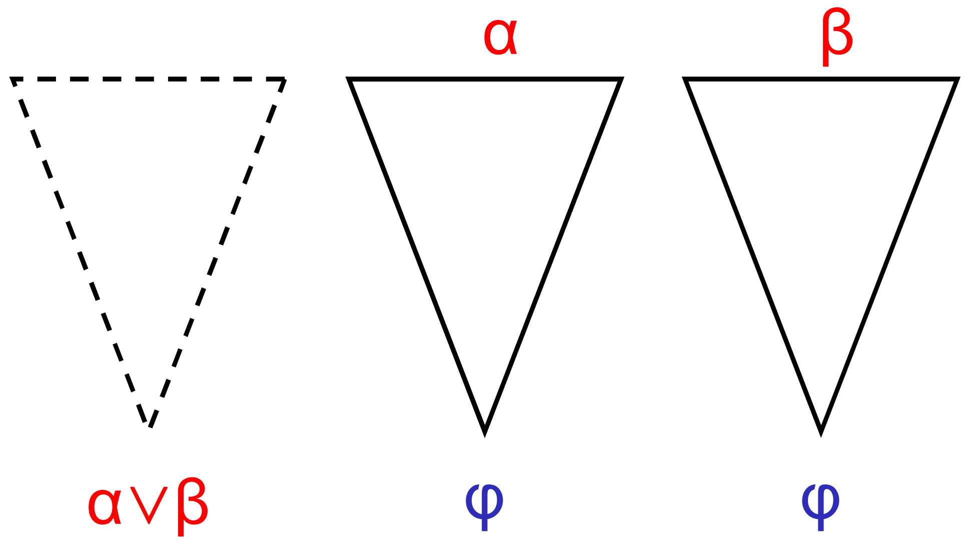
Trasformiamolo in un albero nel modo seguente:

Poiché nella derivazione "a grafo" α e β non sono assunzioni da cui dipende φ, nella regola esse devono essere "cancellate".



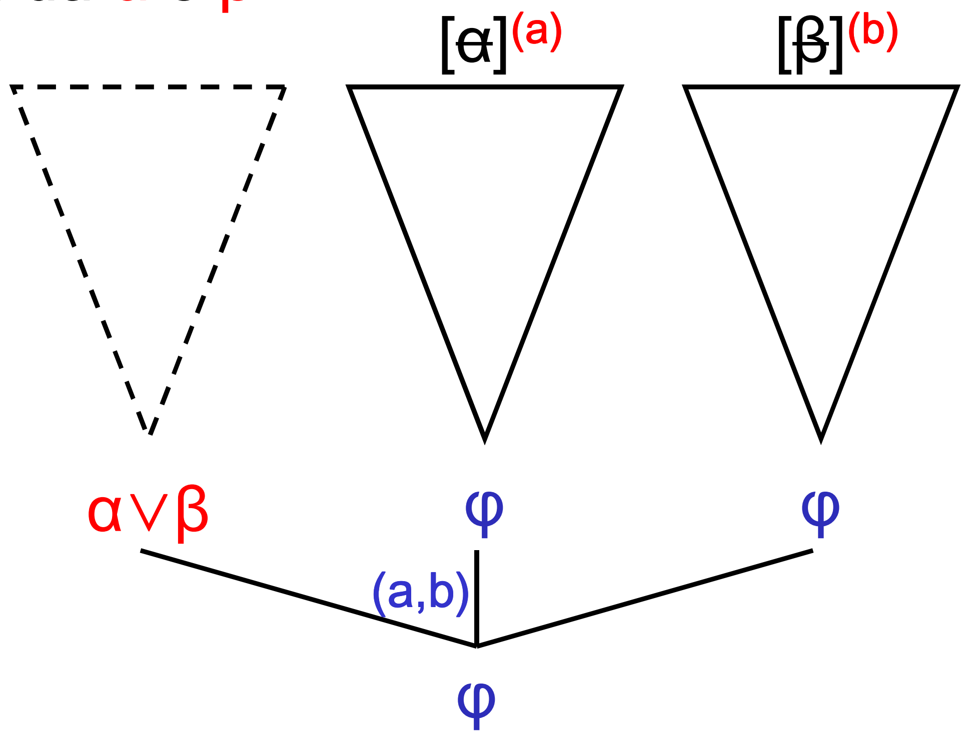
La regola di eliminazione della disgiunzione: brutta …

Si riesce quindi a mantenere la forma ad albero formulando la regola in modo che anch'essa, come l'implicazione, scarichi delle assunzioni. Se da ciascuna delle assunzioni α e β si deriva indipendentemente φ, allora …



La regola di eliminazione della disgiunzione: brutta …

Si riesce quindi a mantenere la forma ad albero formulando la regola in modo che anch'essa, come l'implicazione, scarichi delle assunzioni. Se da ciascuna delle assunzioni α e β si deriva indipendentemente φ, allora se abbiamo una dimostrazione di $\alpha \vee \beta$, essa è anche, per quello stesso φ, una dimostrazione che non dipende più da α e β.



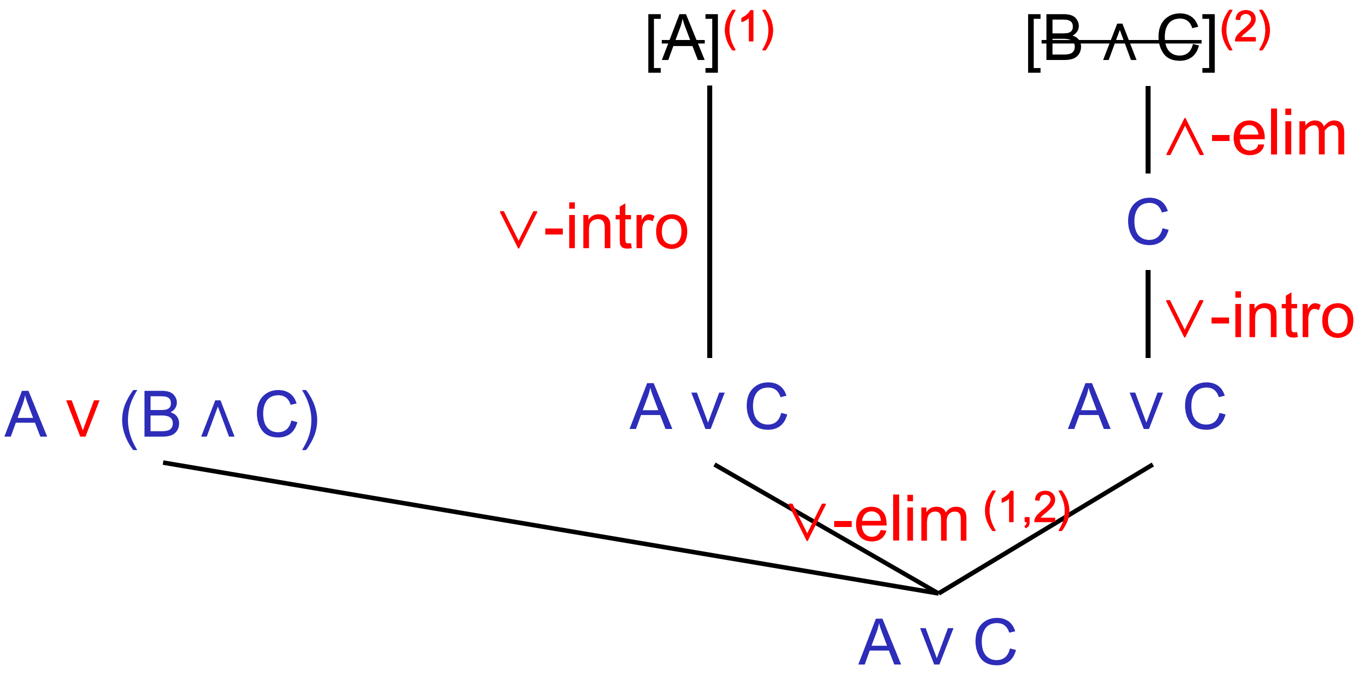
Esempio.

La derivazione di $A \vee C$ dalla premessa $A \vee (B \wedge C)$ è allora:

$$\dfrac{A}{A \vee C}\ \vee\text{-intro} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{B \wedge C}{C}\ \wedge\text{-elim}}{A \vee C}\ \vee\text{-intro}$$

Esempio.

La derivazione di $A \vee C$ dalla premessa $A \vee (B \wedge C)$ è allora:



Esercizio

Disegnare la derivazione $\neg\, \alpha \vee \neg\, \beta \;\vdash\; \neg\, (\alpha \wedge \beta)$ mostrata nelle slides precedenti nella forma ad albero, cioè nella deduzione naturale vera e propria.

La deduzione naturale di … una legge ovvia.

$\varphi \vee \psi$ $\neg\varphi$

ψ

Facciamo un ragionamento per casi partendo da $\varphi \vee \psi$

La deduzione naturale di … una legge ovvia.

$\varphi \vee \psi$ $\quad\quad$ $\varphi^{(H)}$ $\quad\quad$ $\neg\varphi$ $\quad\quad$ $\psi^{(H)}$

ψ

Introduciamo quindi due ipotesi provvisorie corrispondenti ai due casi della disgiunzione, e deriviamo ψ da ognuna di esse.

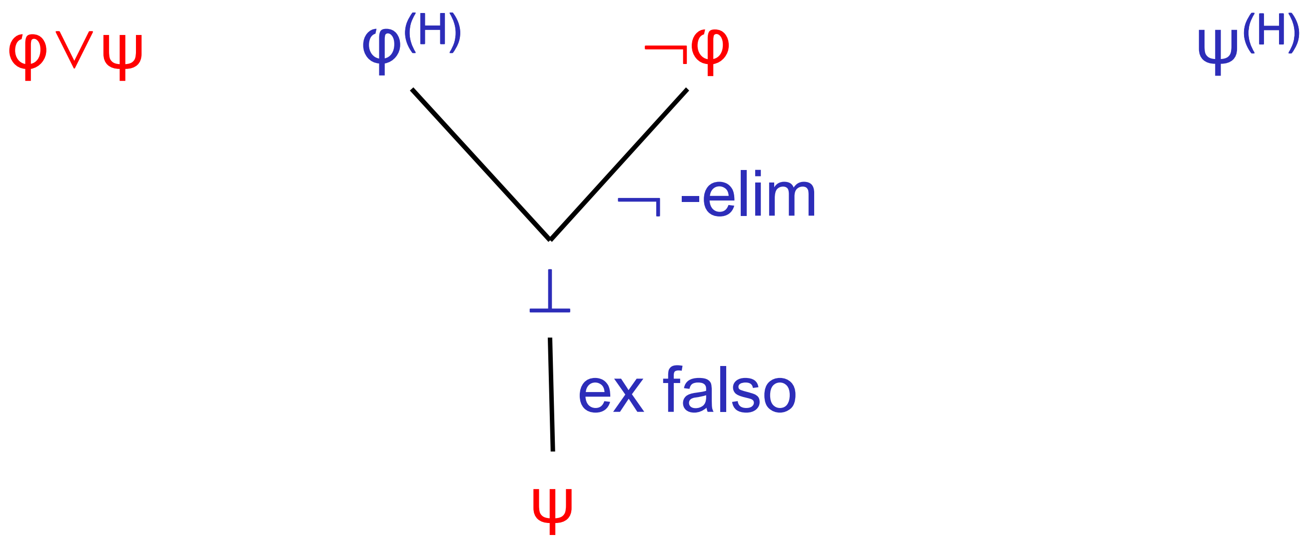
La deduzione naturale di … una legge ovvia.

$\varphi \vee \psi$ $\qquad$ $\psi^{(H)}$

$$\dfrac{\varphi^{(H)} \qquad \neg\varphi}{\bot}\ \neg\text{ -elim}$$

Dall'ipotesi provvisoria φ, insieme all'ipotesi "vera" $\neg\varphi$, …

La deduzione naturale di … una legge ovvia.



Dall'ipotesi provvisoria φ, insieme all'ipotesi "vera" $\neg\varphi$, deriviamo ψ tramite la regola ex-falso.

L'altra ipotesi provvisoria, ψ, è già la conclusione.

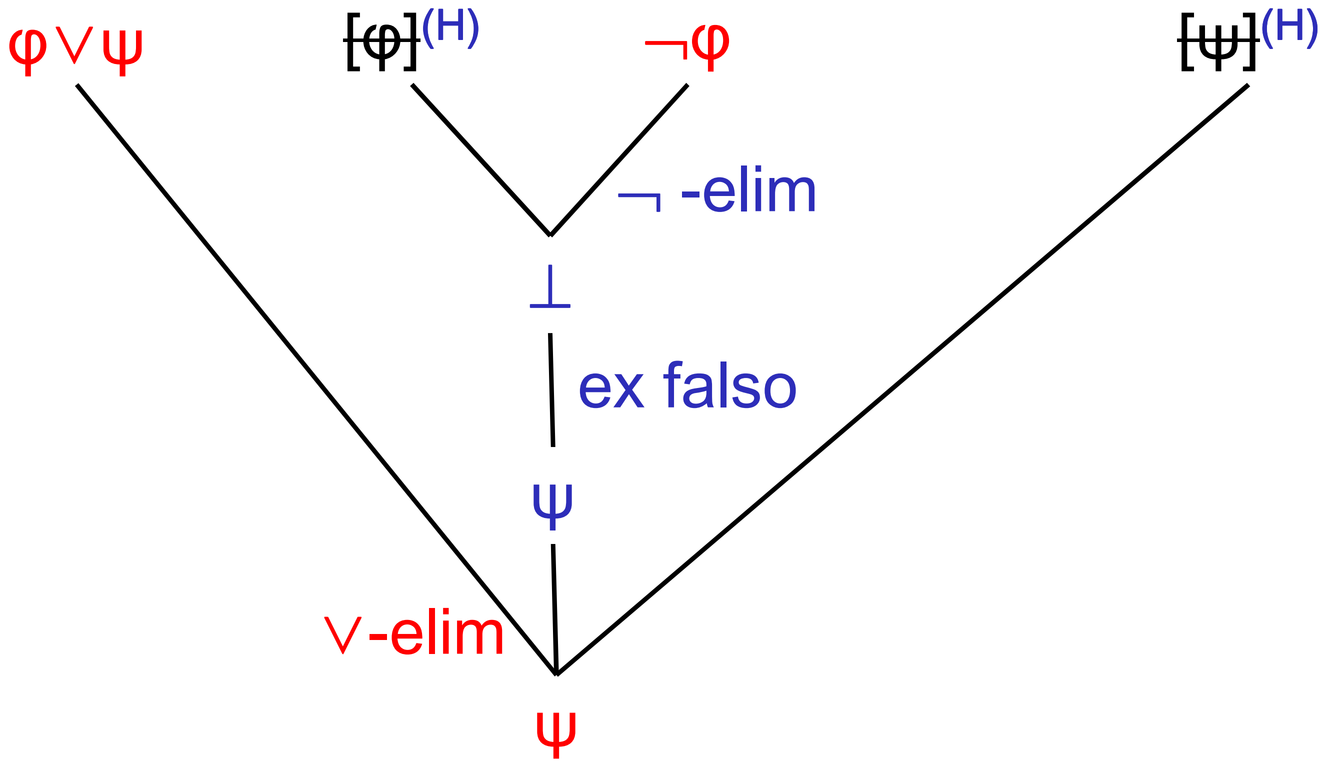
La deduzione naturale di … una legge ovvia.

$\varphi \vee \psi$ $\qquad$ $\dfrac{\varphi^{(H)} \quad \neg\varphi}{\bot}\ \neg\text{-elim}$ $\qquad$ $\psi^{(H)}$

$$\dfrac{\bot}{\psi}\ \text{ex falso}$$

Abbiamo quindi una derivazione di ψ, in ciascuno dei due casi, possiamo applicare la $\vee$-elim a $\varphi \vee \psi$, scaricando le due ipotesi provvisorie.

La deduzione naturale di … una legge ovvia.



Rimangono non scaricate le "vere" ipotesi, $\varphi \vee \psi$ e $\neg\varphi$.

Deduzione naturale: solo regole di inferenza, nessun assioma.

Nei sistemi di deduzione naturale, come quello presentato fin qui, non ci sono assiomi, ma solo regole di inferenza, che permettono di dedurre degli enunciati a partire da altri enunciati o assunzioni.

Tuttavia le regole che scaricano delle premesse permettono, come abbiamo visto, di derivare delle tautologie, cioè degli enunciati che non dipendono da alcuna assunzione.

Premesse e conclusioni

Un'assunzione può essere vista come la conclusione di una derivazione da se stessa.

Esempio:

$$\begin{array}{c}[\cancel{A}]^{(u)}\\ \Big| \quad {}^{(u)} \to\text{-intro} \\ A \to A\end{array}$$

La formula $A \to A$ è un'ovvia tautologia
(ogni proposizione implica se stessa)

Esempio rivisitato.

Riprendiamo l'esempio di Aldo, Beatrice e Caio.

Date le premesse:

1. $A \vee B$ = Aldo ha una giacca rossa o Beatrice mente.
2. $\neg A$ = Aldo non ha una giacca rossa.
3. $\neg B \vee C$ = Beatrice non mente o Caio è l'assassino.

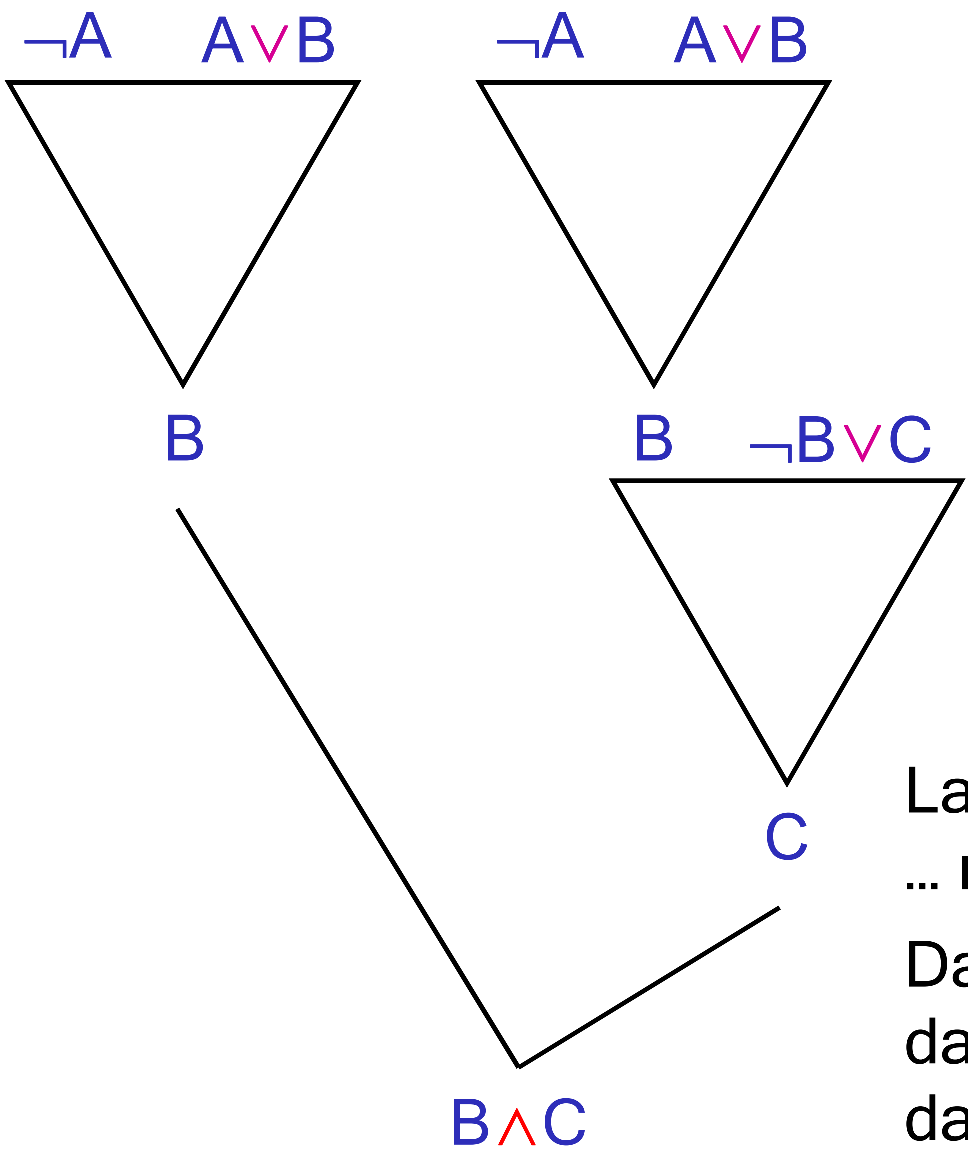
una conseguenza, verificata per mezzo delle tavole di verità, è:

$B \wedge C$ = Beatrice mente e Caio è l'assassino.

Vediamo ora come la formula $B \wedge C$ si deriva dalle premesse nel calcolo della deduzione naturale.

A tal fine utilizziamo come componente della derivazione, senza riscriverlo esplicitamente, l'albero di derivazione di una formula ψ dalle premesse $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, visto nelle slides precedenti.

L'esempio trattato con la deduzione naturale.



La deduzione naturale è … molto naturale:

Da $\neg A$ e $A \vee B$ derivo B;
da B e $\neg B \vee C$ derivo C;
da B e C derivo $B \wedge C$.

Per la logica classica manca una regola!

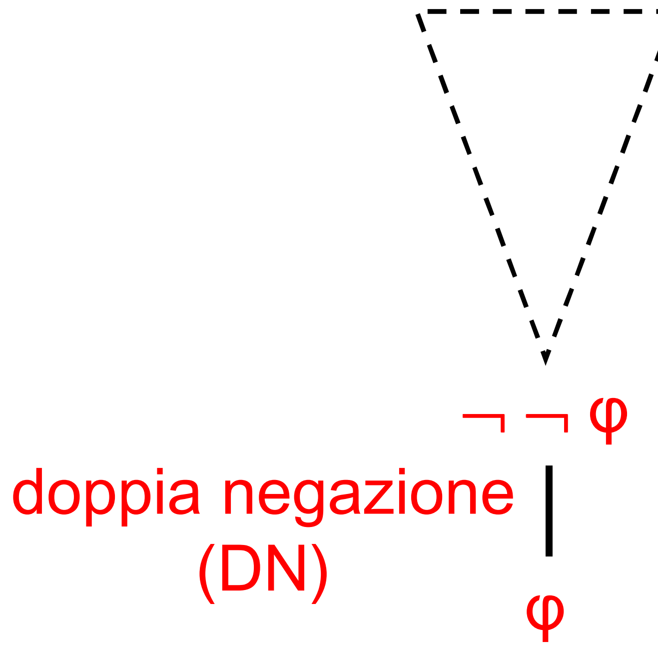
L'insieme delle regole presentate finora costituisce il sistema di inferenza della cosiddetta logica intuizionista. In esso non si possono derivare:

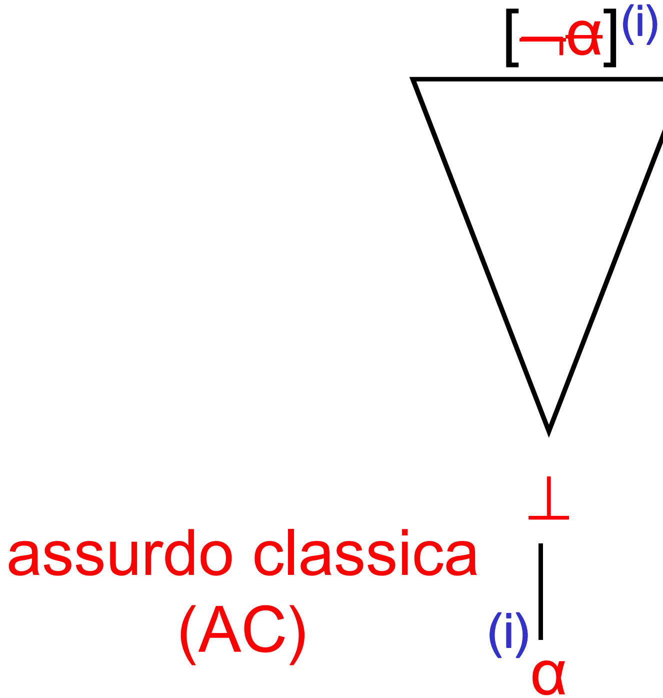
- la tautologia classica $\varphi \vee \neg \varphi$;
- l'equivalenza fra doppia negazione e affermazione: $\neg \neg \varphi \leftrightarrow \varphi$
- la cosiddetta regola dell'assurdo classica: se dall'assunzione $\neg \varphi$ si deriva una contraddizione, allora si è dimostrato φ.

I tre assiomi o regole precedenti sono fra loro equivalenti, nel senso che basta aggiungere al sistema come ulteriore regola o assioma uno qualunque dei tre, per ottenere la derivabilità degli altri due, e dunque la logica classica.

La logica classica.

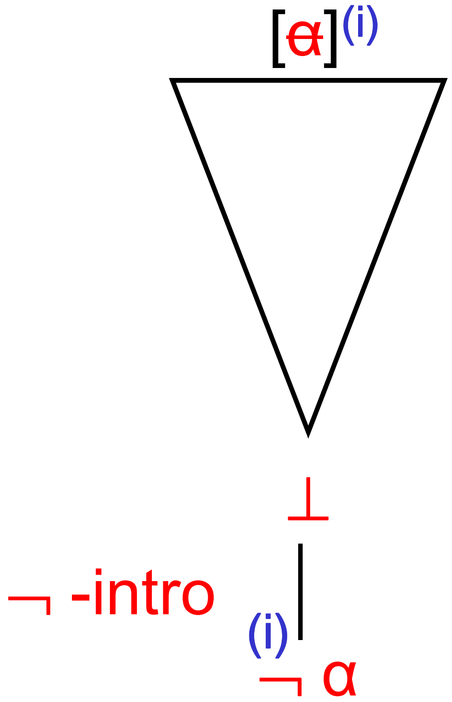
Il sistema di deduzione naturale per la logica classica è dunque costituito dalle regole introdotte finora, cioè dal sistema della logica intuizionista, con l'aggiunta ad es. dell'assioma del terzo escluso $\varphi \vee \neg\varphi$, oppure con l'aggiunta della regola della doppia negazione, oppure con la regola dell'assurdo classica.

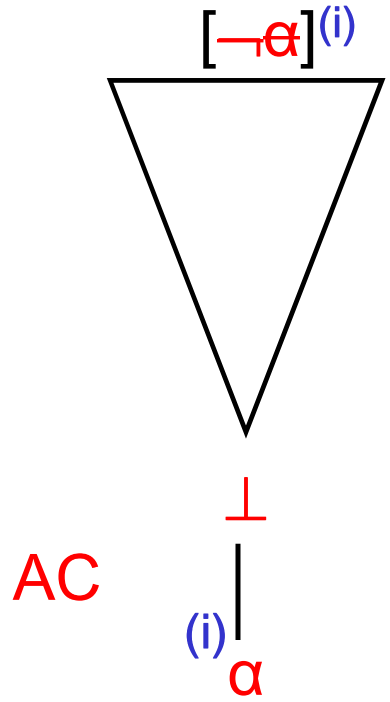




La regola dell'assurdo classica.

Confronta la regola dell'assurdo classica con la regola ¬ -intro:





È immediato vedere che se si introduce la regola della doppia negazione, la regola AC risulta derivabile, e viceversa. Osserva che la regola AC è quella della vera dimostrazione per assurdo: per dimostrare α, si assume ¬α, e si mostra che si ottiene una contraddizione.

Dimostrazioni per assurdo.

Nella logica classica, come abbiamo visto, grazie al principio di bivalenza (espresso ad esempio dall'assioma della doppia negazione), le due regole $\neg$ -intro e AC si equivalgono, e corrispondono entrambe al metodo di dimostrazione usualmente chiamato "dimostrazione per assurdo".

La logica intuizionista, invece, mentre considera accettabile la prima regola, che permette di affermare la negazione di un enunciato mostrando che da esso si dedurrebbe una contraddizione, rifiuta la seconda regola, che permette di affermare un enunciato positivo mostrando che la sua negazione porterebbe ad una contraddizione.

Intuizionismo e doppia negazione.

Osserva che nella logica intuizionista:

- benché non valga l'implicazione $\neg \neg \varphi \to \varphi$
- l'implicazione inversa $\varphi \to \neg \neg \varphi$ invece vale, come si può vedere facilmente.

$$\neg\text{-elim}\;\dfrac{\varphi \qquad \neg \varphi}{\bot}$$

Intuizionismo e doppia negazione.

Osserva che nella logica intuizionista:

- benché non valga l'implicazione $\neg\neg\varphi \to \varphi$
- l'implicazione inversa $\varphi \to \neg\neg\varphi$ invece vale, come si può vedere facilmente.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad [\neg\varphi]}{\bot}\ \neg\text{-elim}}{\neg\neg\varphi}\ \neg\text{-intro}$$

Correttezza e completezza della deduzione naturale.

Il sistema della deduzione naturale classico per la logica proposizionale risulta perfettamente equivalente al metodo delle tavole di verità.

Cioè una formula τ è conseguenza logica (nel senso preciso definito operativamente per mezzo delle tavole di verità) delle assunzioni $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ se e solo se esiste una deduzione di τ dalle assunzioni $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, cioè se e solo se esiste un albero di deduzione con foglie non scaricate $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ e con radice τ.

Concisamente, come anticipato nella slide 4:

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \models \tau \quad \text{se e solo se} \quad \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$$

Logica intuizionista.

La logica intuizionista fu introdotta dal logico olandese Arend Heyting nel 1930 per formalizzare il modo di ragionare del fondatore dell'intuizionismo, il logico, matematico e filosofo olandese L. E. J. Brouwer (1881-1966). La logica intuizionista è la base della matematica cosiddetta "costruttiva".

Luitzen Egbertus Jan Brouwer

Logica intuizionista.

La logica intuizionista non si fonda sul concetto di verità, bensì su quello di dimostrazione: un enunciato matematico non è una descrizione, in senso tarskiano, una qualche realtà matematica metafisica esistente nel mondo platonico delle idee, bensì una affermazione che si è costruita una dimostrazione, e le uniche dimostrazioni valide sono quelle che non fanno appello a principi "non costruttivi" come il terzo escluso.

Negli anni '30 del Novecento il conflitto fra matematici classici e intuizionisti fu molto aspro. Hilbert fece espellere Brouwer dal comitato editoriale dei Mathematische Annalen, prestigiosa rivista di matematica dell'epoca, diretta dallo stesso Hilbert.

D'altra parte Brouwer e molti intuizionisti consideravano i risultati non costruttivi della matematica classica come un cumulo di affermazioni prive di senso.

Matematica classica e matematica costruttiva.

Già nell'Ottocento era scoppiata una polemica analoga. Nella seconda metà del secolo Cantor, insieme ad altri, aveva creato la teoria degli insiemi, che introduceva esplicitamente in matematica l'infinito in atto. Cantor collegava esplicitamente la sua teoria alla teologia, e pensava di essere ispirato da Dio.

Il suo collega Kronecker, altro noto matematico dell'Ottocento, professore a Berlino, una sorta di intuizionista ante litteram, lo qualificò di ciarlatano e corruttore della gioventù.

Agli inizi del '900 Hilbert, in polemica appunto con Brouwer, fece la famosa dichiarazione "Nessuno ci scaccerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi".

Oggi matematica costruttiva e matematica classica convivono semplicemente come due aree diverse della matematica, ognuna con i suoi metodi, i suoi teoremi, ecc., non molto diversamente da come convivono ad es. geometria e analisi.

La negazione intuizionista.

Nella logica intuizionista asserire un enunciato φ significa dunque asserire di avere una dimostrazione di φ.

Tuttavia asserire $\neg\varphi$ non significa asserire di non avere una dimostrazione di φ, bensì asserire che, assumendo $\neg\varphi$, si ottiene una contraddizione.

Nella logica intuizionista la contraddizione, o l'assurdo, o il falso, è considerata una costante proposizionale primitiva, denotata di solito dal simbolo $\perp$ (corrispondente al simbolo F della logica booleana) che gode della caratteristica che da essa si può dedurre qualunque cosa (ex falso quodlibet).

La negazione è allora intesa come una mera abbreviazione: $\neg\varphi$ è una abbreviazione di $\varphi \rightarrow \perp$: cioè φ implica l'assurdo.

Logica intuizionista.

Dunque nella logica intuizionista:

- <u>non vale la tautologia classica</u> $\varphi \vee \neg \varphi$: nell'intuizionismo avere una dimostrazione di $\varphi \vee \psi$ significa avere una dimostrazione di φ o una dimostrazione di ψ; quindi si ha una dimostrazione di una formula $\varphi \vee \neg \varphi$ solo se si ha una dimostrazione di φ oppure una dimostrazione di $\neg \varphi$ (detta anche refutazione di φ); ciò può valere per alcune formule, ma non vale in generale;
- <u>non vale l'equivalenza fra doppia negazione e affermazione</u>: per l'intuizionismo $\neg \neg \varphi$ vuol solo dire che assumendo $\neg \varphi$ si ottiene una contraddizione, ma ciò non vuol dire che abbiamo una dimostrazione di φ;
- <u>non vale la cosiddetta regola dell'assurdo classica</u>: se dall'assunzione $\neg \varphi$ si deriva una contraddizione, ciò non permette di derivare φ, ma solo $\neg \neg \varphi$, che non equivale a φ.

Logica intuizionista

Per i connettivi intuizionisti non è dunque possibile costruire delle tavole di verità; per la logica intuizionista non vi è alcun metodo basato su tavole di verità.

Esempio. La congettura di Goldbach: ogni numero pari si può esprimere come somma di due numeri primi.

Per i platonisti, che credono nell'esistenza di tutti gli infiniti numeri naturali con tutte le loro proprietà indipendentemente dall'uomo, la congettura è o vera o falsa, anche se noi (per ora) non sappiamo se sia vera o falsa. Per gli intuizionisti, almeno fino a quando non avremo una dimostrazione della congettura o una sua refutazione, essa non è né vera né falsa.

L'intuizionismo ha connessioni con la filosofia di Kant: per Kant infatti vi sono affermazioni, come "il mondo è limitato", tali che né esse né le loro negazioni sono vere, perché il mondo (nel senso di "l'intera realtà") non è una "cosa".

Logica intuizionista e informatica

Molti dei risultati classici valgono anche nella matematica e nella logica intuizionista, ma spesso le dimostrazioni sono più complicate e meno eleganti. In compenso, le dimostrazioni intuizioniste sono più informative di quelle classiche, e hanno in generale un immediato contenuto computazionale.

La logica intuizionista è risultata quindi di particolare importanza per l'informatica. Daremo su questo qualche dettaglio più avanti.

Una dimostrazione valida classicamente ma non intuizionisticamente.

Teorema. Esistono due numeri irrazionali a e b, non necessariamente distinti, tali che a^b è un numero razionale.

Dimostrazione.

Come è noto da Pitagora in poi, $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale;

allora se per caso $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è un numero razionale, i due numeri sono $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$: a^b è un numero razionale, e l'enunciato del teorema quindi in questo caso vale.

Se invece (come sembra più probabile) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è irrazionale,

allora poniamo $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$.

Si ha $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ e l'enunciato del teorema vale. Quindi o in un caso o nell'altro l'enunciato vale.

È una dimostrazione non costruttiva!

Abbiamo dimostrato che deve esistere una coppia di numeri irrazionali (eventualmente coincidenti) a e b tali che a^b è razionale, ma non abbiamo scoperto qual è questa coppia.

Abbiamo solo dimostrato che essa è una delle due coppie:

$$a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{2}, \qquad \text{oppure} \qquad a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ b = \sqrt{2}.$$

ma non abbiamo stabilito con certezza quale delle due sia. Questa dimostrazione non è quindi intuizionisticamente valida.

Solo una dimostrazione molto più complessa permette di dimostrare che effettivamente $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è irrazionale, e che quindi la coppia che "verifica" il teorema è la seconda, come forse si poteva indovinare. Questa seconda dimostrazione, che non riportiamo, è valida anche intuizionisticamente.

Logica classica e discorso comune.

La logica sottostante il discorso comune e la matematica standard rimane la logica classica. Tuttavia l'approccio costruttivo e computazionale alla matematica e alla logica sono oggi sempre più importanti, anche da un punto di vista filosofico.

Esercizi: derivazioni delle leggi di de Morgan

Sono due leggi, ognuna delle quali ha due versi. Sono quindi quattro derivazioni, rispettivamente di:

1) $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$

e viceversa: $\neg\alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$

2) $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$

e viceversa: $\neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$

O, equivalentemente, le derivazioni delle quattro tautologie:

1) $\neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$

2) $\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$

Legge 1 "diretta".

$$\neg (\alpha \vee \beta) \vdash \neg \alpha \wedge \neg \beta$$

$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$

Come si costruisce la derivazione.

Per dimostrare $(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ possiamo cercare di dimostrare separatamente $\neg\alpha$ e $\neg\beta$.

Per dimostrare $\neg\alpha$ dimostriamo che, assumendo α, si ottiene una contraddizione con l'assunzione,

Esempio. L'assunzione sia "non accade che piove o nevica".

Allora: se piovesse, ovviamente potremmo affermare che piove o nevica: ma ciò contraddice direttamente l'assunzione. Quindi non piove.

In modo strettamente analogo ricaviamo che non nevica.

Quindi non piove e non nevica.

$$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

$\neg(\alpha \vee \beta)$

$\neg\alpha \wedge \neg\beta$

Cerchiamo di costruire la derivazione partendo dalla conclusione.

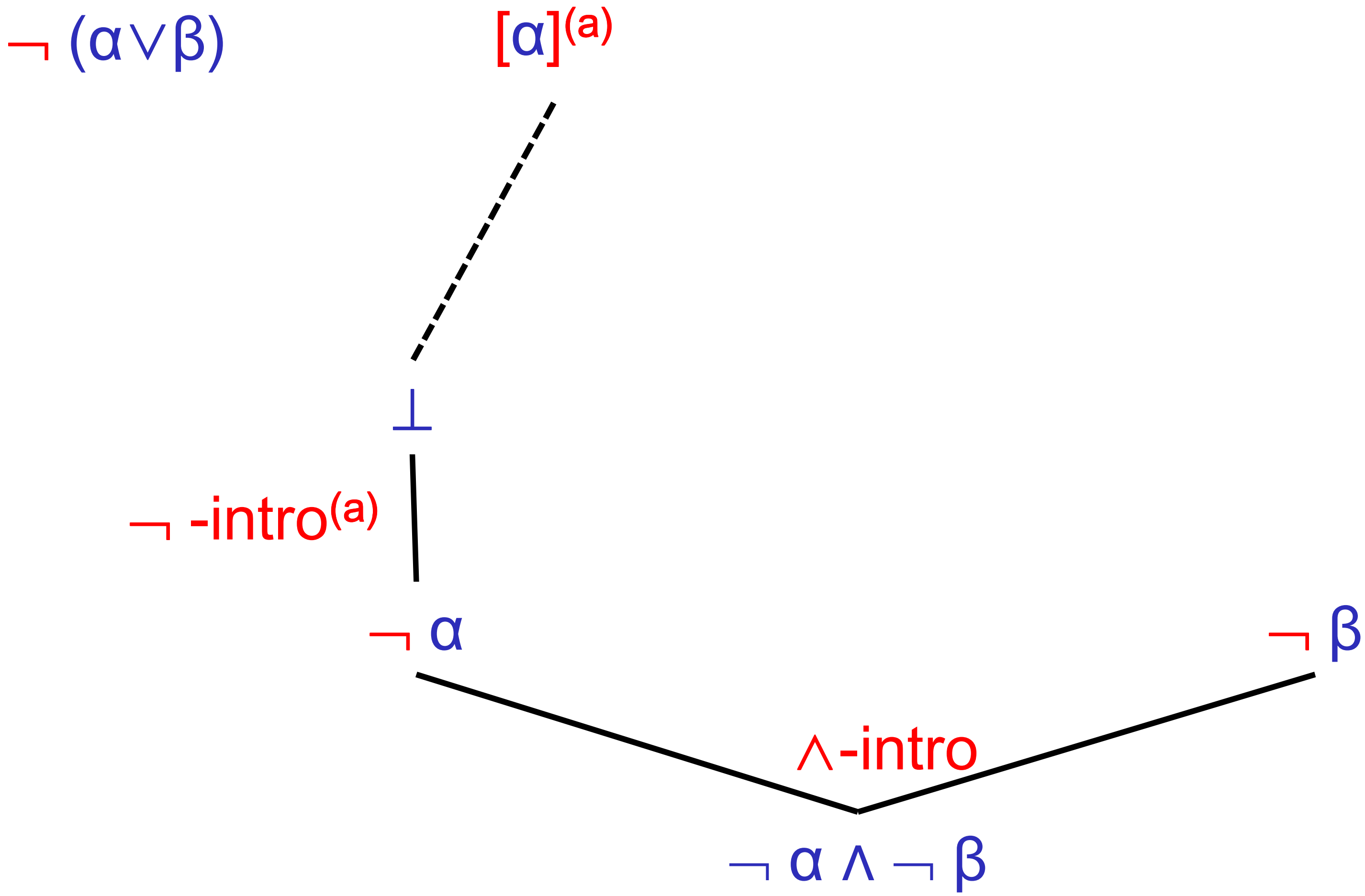
$$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

$\neg(\alpha\vee\beta)$

$$\dfrac{\neg\alpha \qquad\qquad \neg\beta}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}\ \wedge\text{-intro}$$

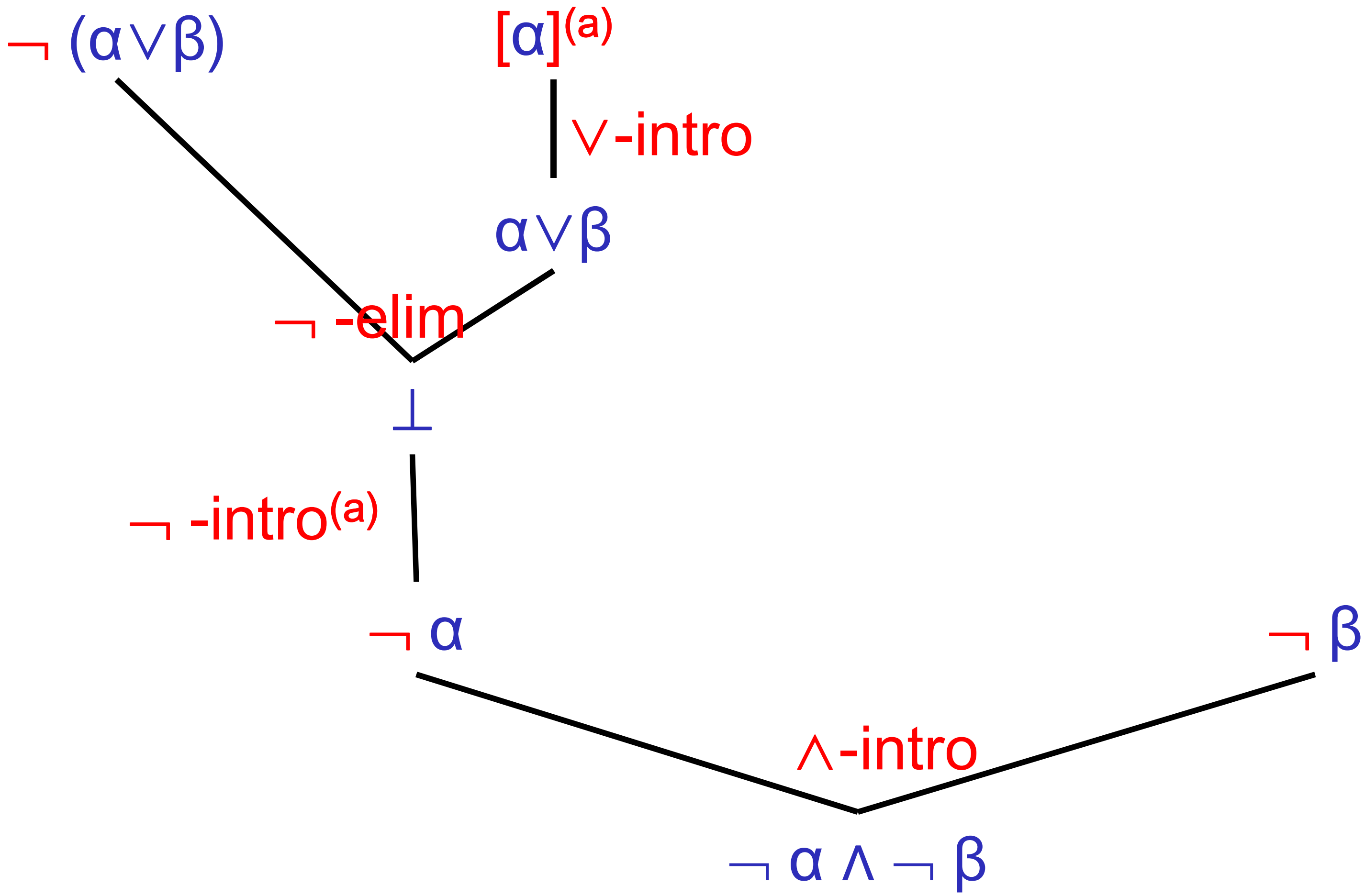
Cerchiamo di costruire la derivazione partendo dalla conclusione: per derivare $\neg\alpha \wedge \neg\beta$ cerco di derivare $\neg\alpha$ e di derivare $\neg\beta$.

$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$



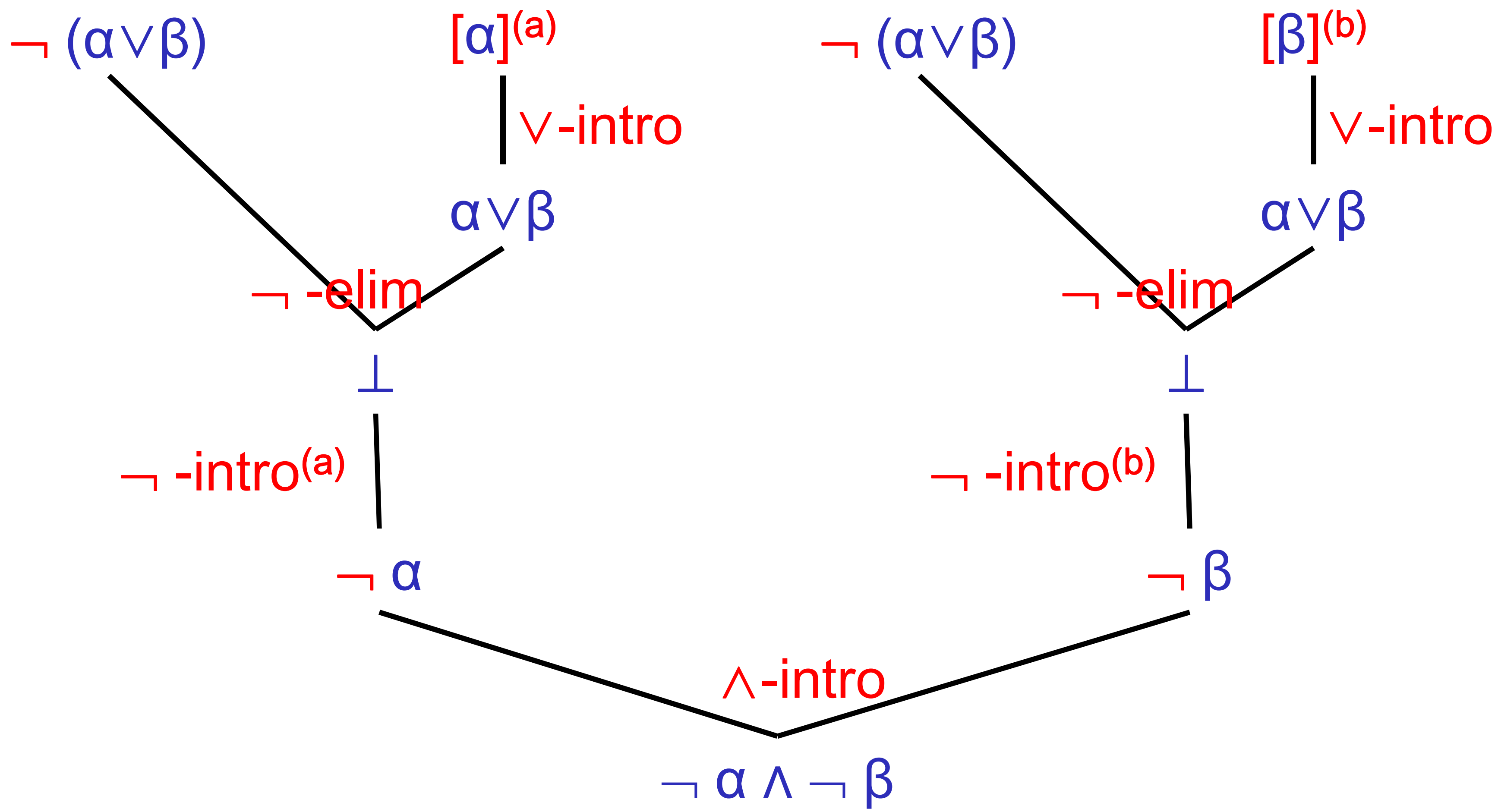
Per derivare $\neg\alpha$ assumo α e cerco di ottenere una contraddizione.

$$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$$



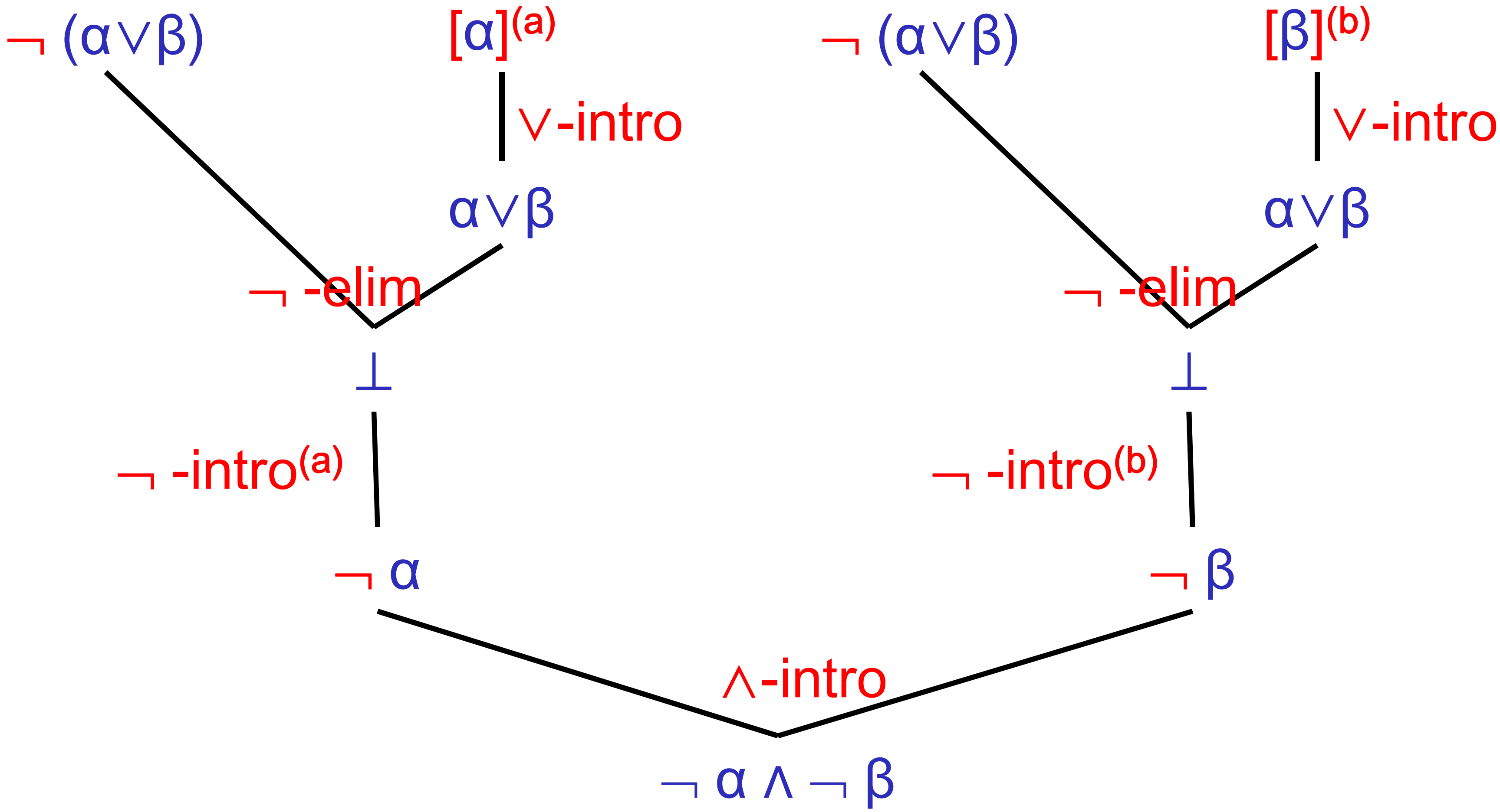
Ma assumendo α ottengo $\alpha \vee \beta$ e quindi una contraddizione con l'assunzione. Ho così ottenuto una derivazione di $\neg\alpha$.

$$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$$



Nello stesso modo derivo $\neg\beta$, e ho finito.

$\neg (\alpha \vee \beta) \vdash \neg \alpha \wedge \neg \beta$



Per ottenere da tale albero la derivazione della tautologia $\neg (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg \alpha \wedge \neg \beta)$, basta applicare una $\rightarrow$-intro alla radice.

Costruzione della derivazione in Proofweb/Coq.

```
Require Import ProofWeb.
Variable A B: Prop.
Theorem deMorgan1: ~(A \/ B) -> ~A /\ ~B.
Proof.
imp_i H1.
con_i.
neg_i a.
neg_e(A \/ B).
exact H1.
dis_i1.
exact a.
neg_i b.
neg_e (A \/ B).
exact H1.
dis_i2.
exact b.
Qed.
```

L'albero generato da ProofWeb.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \lor B)]^{H1} \qquad \dfrac{[A]^{a}}{A \lor B}\ \lor i_{1}}{\bot}\ \neg e}{\neg A}\ \neg i\,[a] \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(A \lor B)]^{H1} \qquad \dfrac{[B]^{b}}{A \lor B}\ \lor i_{2}}{\bot}\ \neg e}{\neg B}\ \neg i\,[b]}{\neg A \land \neg B}\ \land i}{\neg(A \lor B) \to \neg A \land \neg B}\ \to i\,[H1]$$

Oppure, assumendo l'antecedente come ipotesi.

```
Require Import ProofWeb.
Parameter A B: Prop.
Parameter h:  ~(A \/ B).
Theorem deMorgan1: ~A /\ ~B.
Proof.
con_i.
neg_i a.
neg_e(A \/ B).
exact h.
dis_i1.
exact a.
neg_i b.
neg_e (A \/ B).
exact h.
dis_i2.
exact b.
Qed.
```

In Coq puro

```
Require Import Classical.
Section Logica_proposizionale.
Variable A B: Prop.
Hypothesis h: ~(A \/ B).
Theorem deMorgan1: ~A /\ ~B.
Proof.
split.
intro a.
apply h.
left.
assumption.
intro b.
apply h.
right.
assumption.
Qed.
```

Ancora in Coq puro, più semplicemente …

```
Require Import Classical.

Section Logica_proposizionale.
Variable A B: Prop.
Theorem deMorgan1: ~(A \/ B) -> ~A /\ ~B.
Proof.
auto.
Qed.
```

Costruzione dell'albero partendo dall'alto.

Rifacciamo la costruzione dell'albero partendo dall'assunzione e arrivando alla conclusione, in modo da capire bene quali regole applichiamo.

$$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

$\neg(\alpha\vee\beta)$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

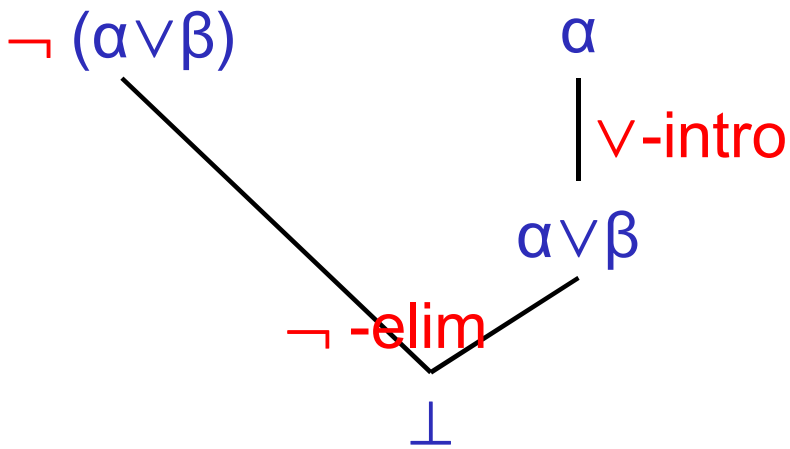
$\neg(\alpha \vee \beta)$ α

$$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

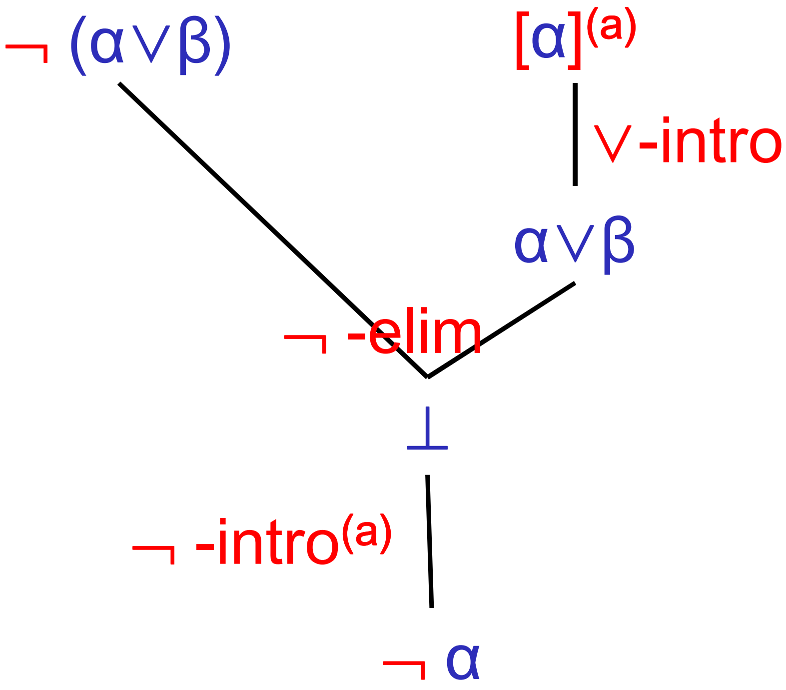
$\neg(\alpha \vee \beta)$

$$\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\ \vee\text{-intro}$$

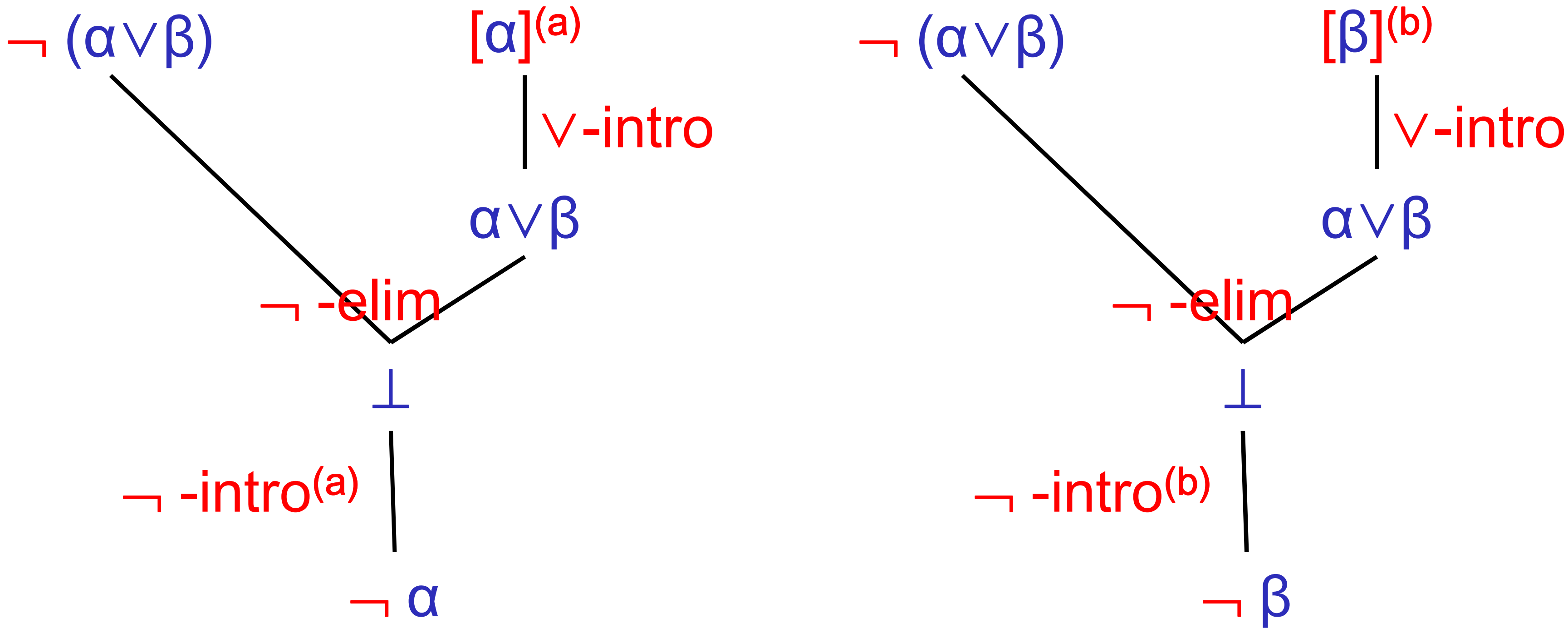
$$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$$



$$\neg(\alpha \vee \beta) \;\vdash\; \neg\alpha \wedge \neg\beta$$



$$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$$



Nello stesso modo dalla stessa assunzione $\neg(\alpha\vee\beta)$ derivo $\neg\beta$.

$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\alpha\vee\beta) \qquad \dfrac{[\alpha]^{(a)}}{\alpha\vee\beta}\,\vee\text{-intro}}{\bot}\,\neg\text{-elim}}{\neg\alpha}\,\neg\text{-intro}^{(a)} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\alpha\vee\beta) \qquad \dfrac{[\beta]^{(b)}}{\alpha\vee\beta}\,\vee\text{-intro}}{\bot}\,\neg\text{-elim}}{\neg\beta}\,\neg\text{-intro}^{(b)}}{\neg\alpha\wedge\neg\beta}\,\wedge\text{-intro}$$

Abbiamo applicato solo regole intuizionisticamente valide; la derivazione vale quindi anche nella logica intuizionista.

Legge 1 "inversa".

$$\neg\, \alpha \wedge \neg\, \beta \;\vdash\; \neg\,(\alpha \vee \beta)$$

Come costruire la derivazione.

$$\neg \alpha \wedge \neg \beta \ \vdash \ \neg (\alpha \vee \beta)$$

Per derivare assumiamo $\alpha \vee \beta$ e cerchiamo di derivare una contraddizione con la "vera" ipotesi $(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$.

Ragioniamo per casi su $\alpha \vee \beta$:

1) Assumiamo α: ma da $\neg \alpha \wedge \neg \beta$ si deriva $\neg \alpha$, e quindi una contraddizione.

2) Assumiamo β : ma da $\neg \alpha \wedge \neg \beta$ si deriva $\neg \beta$, e quindi una contraddizione.

In entrambi i casi si deriva una contraddizione, dunque da $\alpha \vee \beta$ si deriva una contraddizione.

Quest'ultimo passaggio, nel sistema di deduzione naturale, si realizza formalmente tramite la "brutta" regola di $\vee$-elim.

Costruiamo la derivazione dal fondo.

$\neg\alpha \wedge \neg\beta$

$$\frac{\bot}{\neg(\alpha \vee \beta)}$$

Per derivare $\neg(\alpha\vee\beta)$ assumiamo $\alpha\vee\beta$ e cerchiamo di derivare una contraddizione, applicando quindi la regola $\neg$ -intro.

Costruiamo la derivazione dal fondo.

$\neg\alpha \wedge \neg\beta$ $\qquad\qquad$ $[\cancel{\alpha \vee \beta}]^{(c)}$

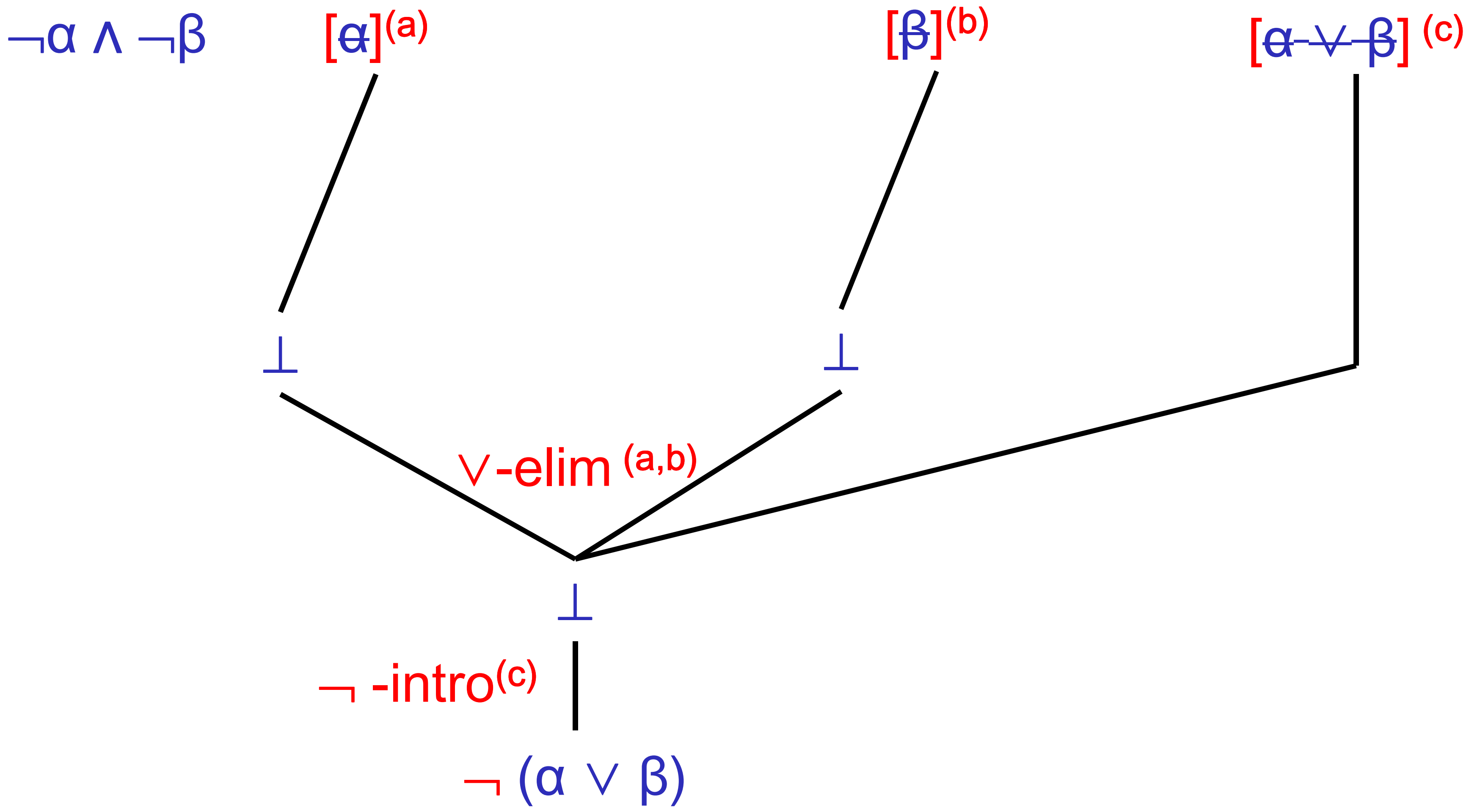
$\bot$

$\neg$ -intro$^{(c)}$

$\neg(\alpha \vee \beta)$

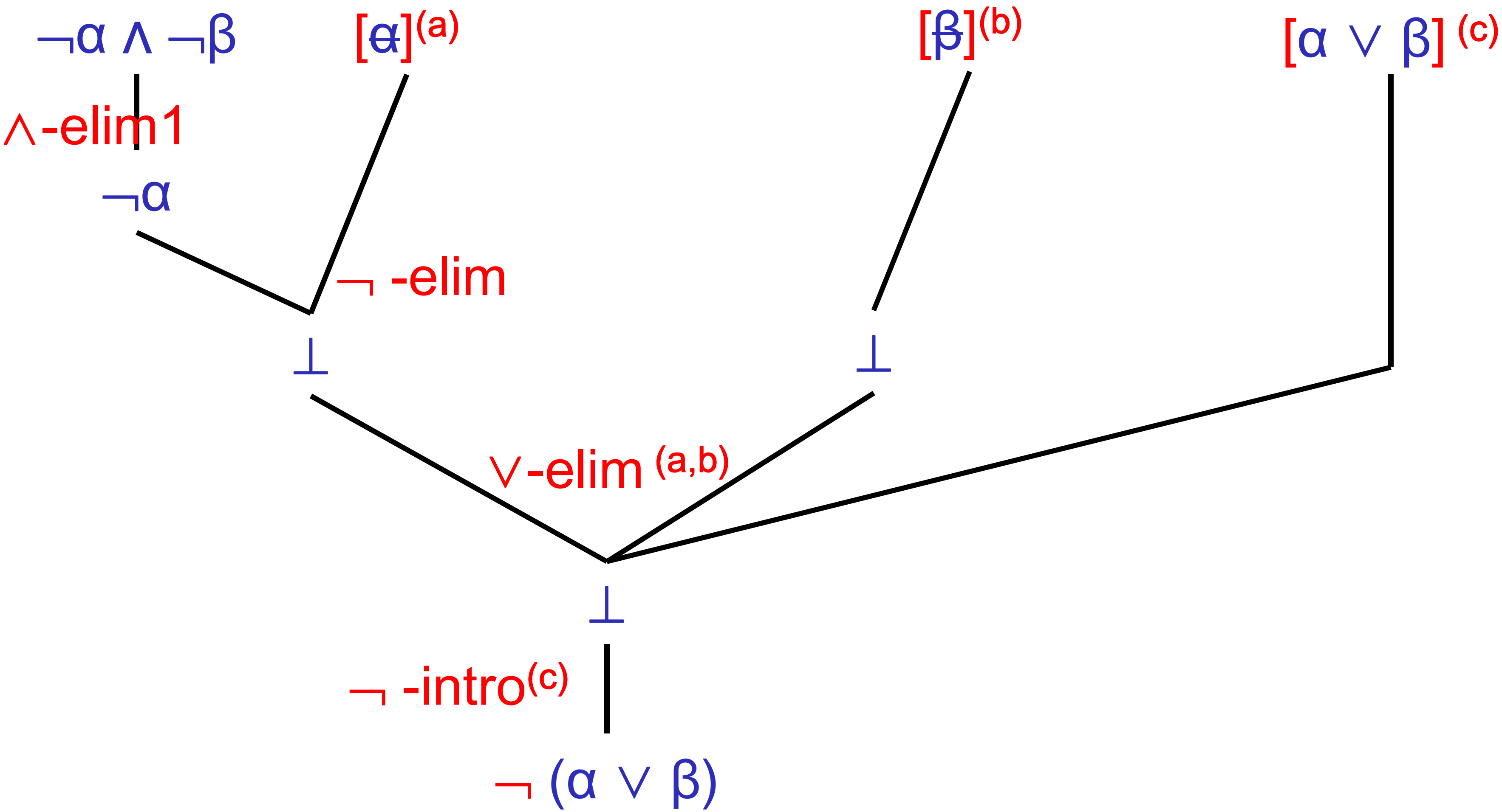
Per derivare $\neg(\alpha\vee\beta)$ assumiamo $\alpha\vee\beta$ e cerchiamo di derivare una contraddizione, applicando quindi la regola $\neg$ -intro.

Costruiamo la derivazione dal fondo.



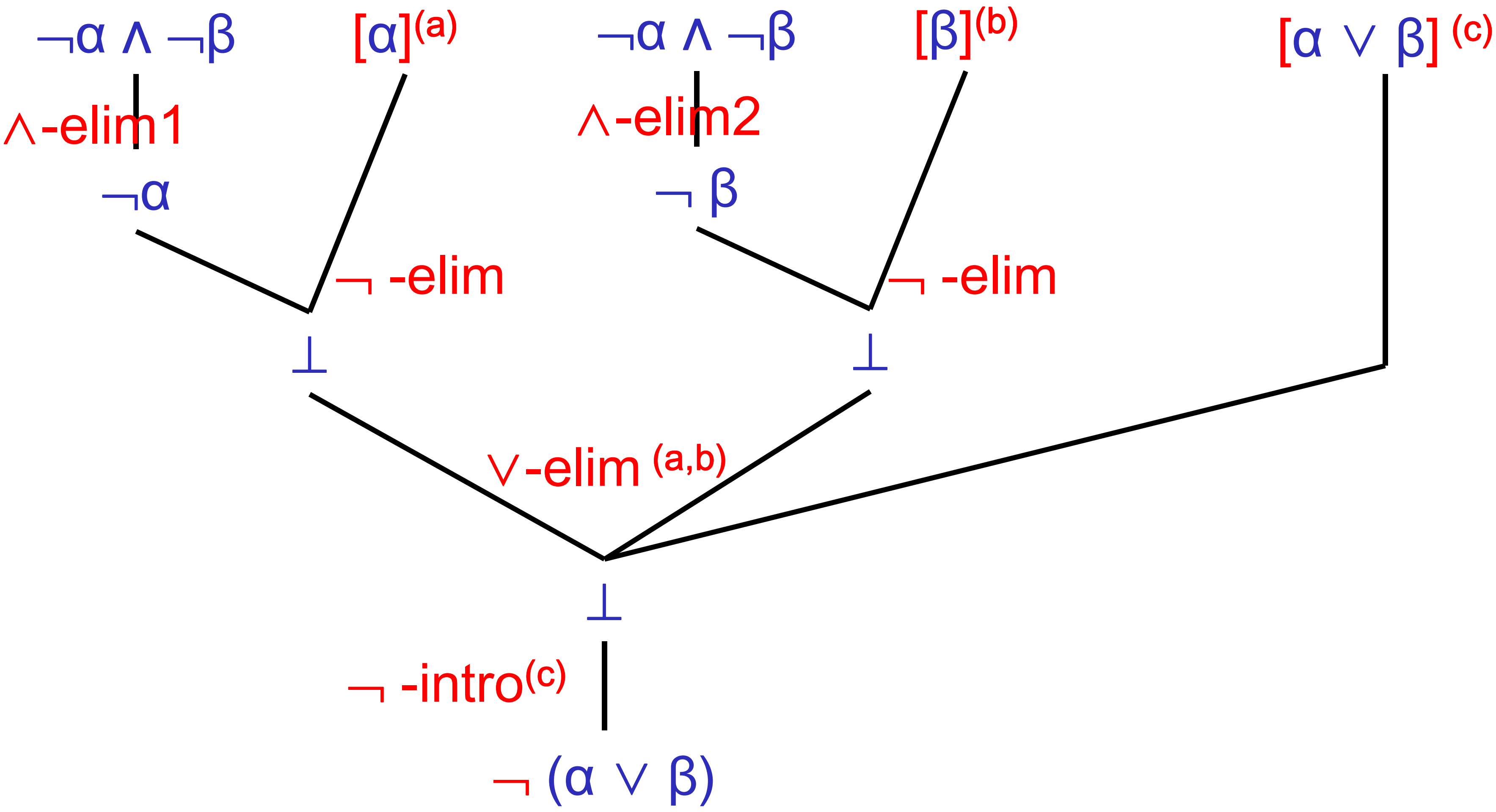
Ragioniamo per casi, in modo da applicare la $\vee$-elim.

Costruiamo la derivazione dal fondo.



Caso 1: da α otteniamo una contraddizione con l'ipotesi.

Costruiamo la derivazione dal fondo.



Caso 2: analogamente da β otteniamo una contraddizione con l'ipotesi, e abbiamo finito.

Costruzione della derivazione in ProofWeb/Coq.

```
Theorem deMorgan1_inv:  (~A /\ ~B) -> ~(A \/ B).
Proof.
imp_i H.
neg_i c.
dis_e (A \/ B) a b.
exact c.
neg_e A.
con_e1 (~B).
exact H.
exact a.
neg_e B.
con_e2 (~A).
exact H.
exact b.
Qed.
```

L'albero generato da ProofWeb

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \lor B]^{c} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A \land \neg B]^{H}}{\neg A}\,\land e_1 \qquad [A]^{a}}{\bot}\,\neg e \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A \land \neg B]^{H}}{\neg B}\,\land e_2 \qquad [B]^{b}}{\bot}\,\neg e}{\bot}\,\lor e[a,b]}{\neg(A \lor B)}\,\neg i[c]}{\neg A \land \neg B \to \neg(A \lor B)}\,\to i[H]$$

Costruzione dell'albero partendo dall'alto.

Rifacciamo la costruzione dell'albero partendo dall'assunzione e arrivando alla conclusione, in modo da capire bene quali regole applichiamo.

Costruzione dell'albero partendo dall'alto.

$\neg\alpha \wedge \neg\beta$

Assumo (provvisoriamente) $\alpha \vee \beta$.

$\neg\alpha \wedge \neg\beta$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\alpha \vee \beta$

Assumo (provvisoriamente) i due casi α e β.

$\neg\alpha \wedge \neg\beta$ α β $\alpha \vee \beta$

Derivo $\neg\alpha$.

$\neg\alpha \wedge \neg\beta$ $\qquad \alpha \qquad \beta \qquad \alpha \vee \beta$

$\neg\alpha$

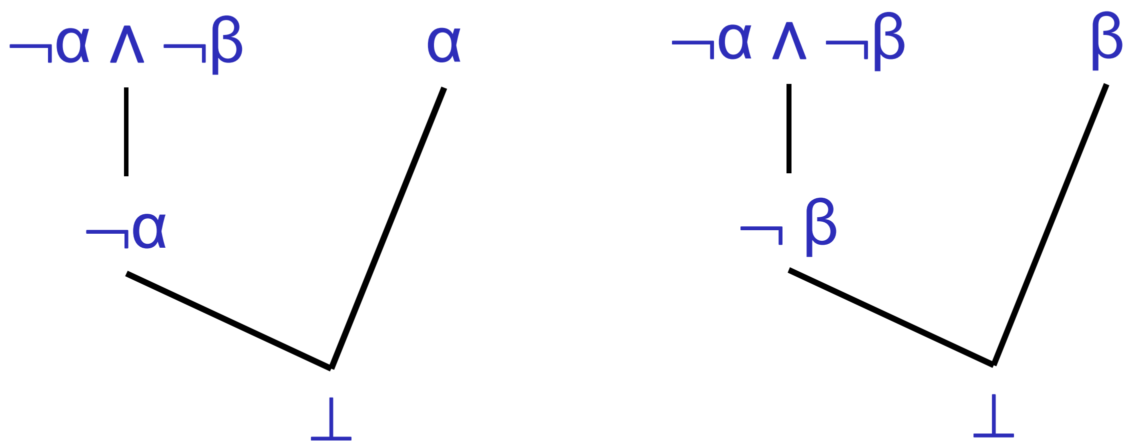
Derivo una contraddizione dall'assunzione α.

$\neg\alpha \wedge \neg\beta$ $\quad$ α $\quad$ β $\quad$ $\alpha \vee \beta$

$\neg\alpha$

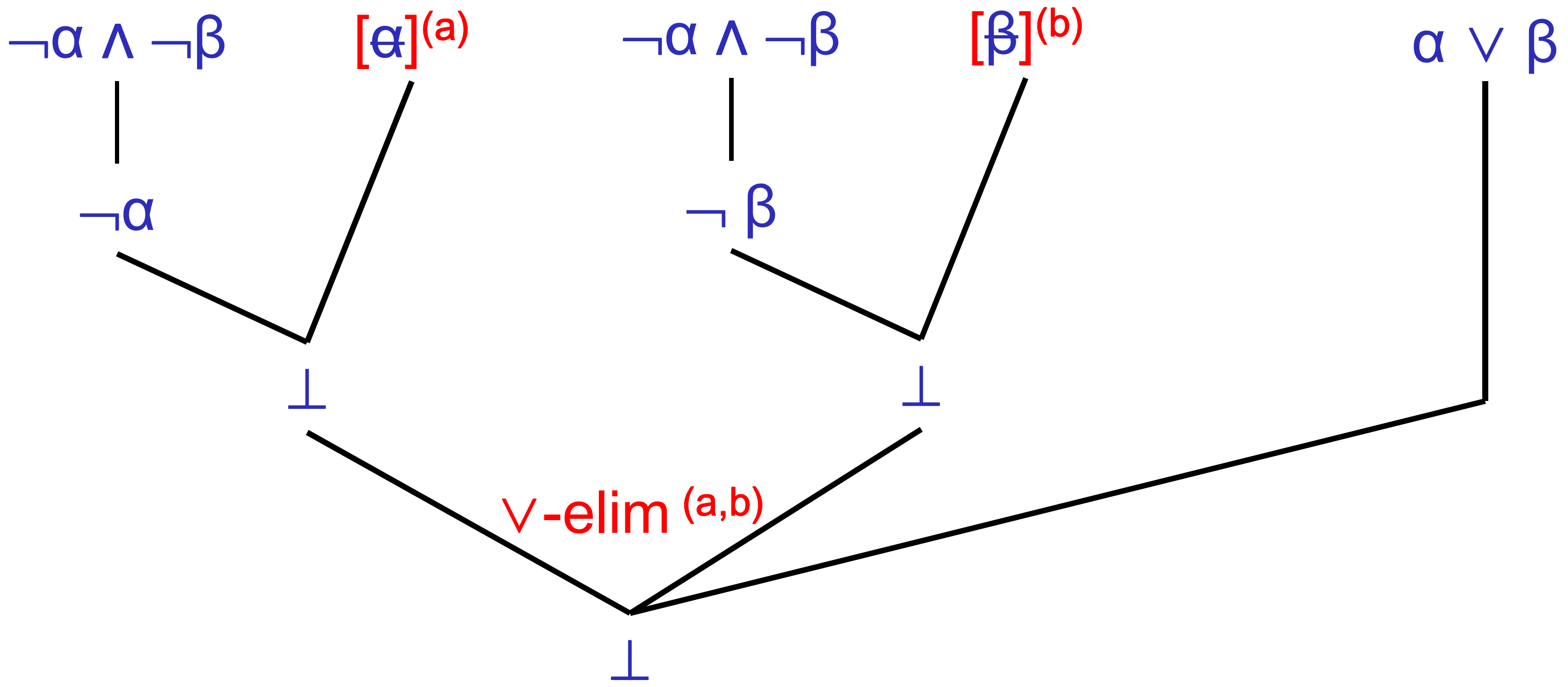
$\perp$

Nello stesso modo derivo una contraddizione da β.

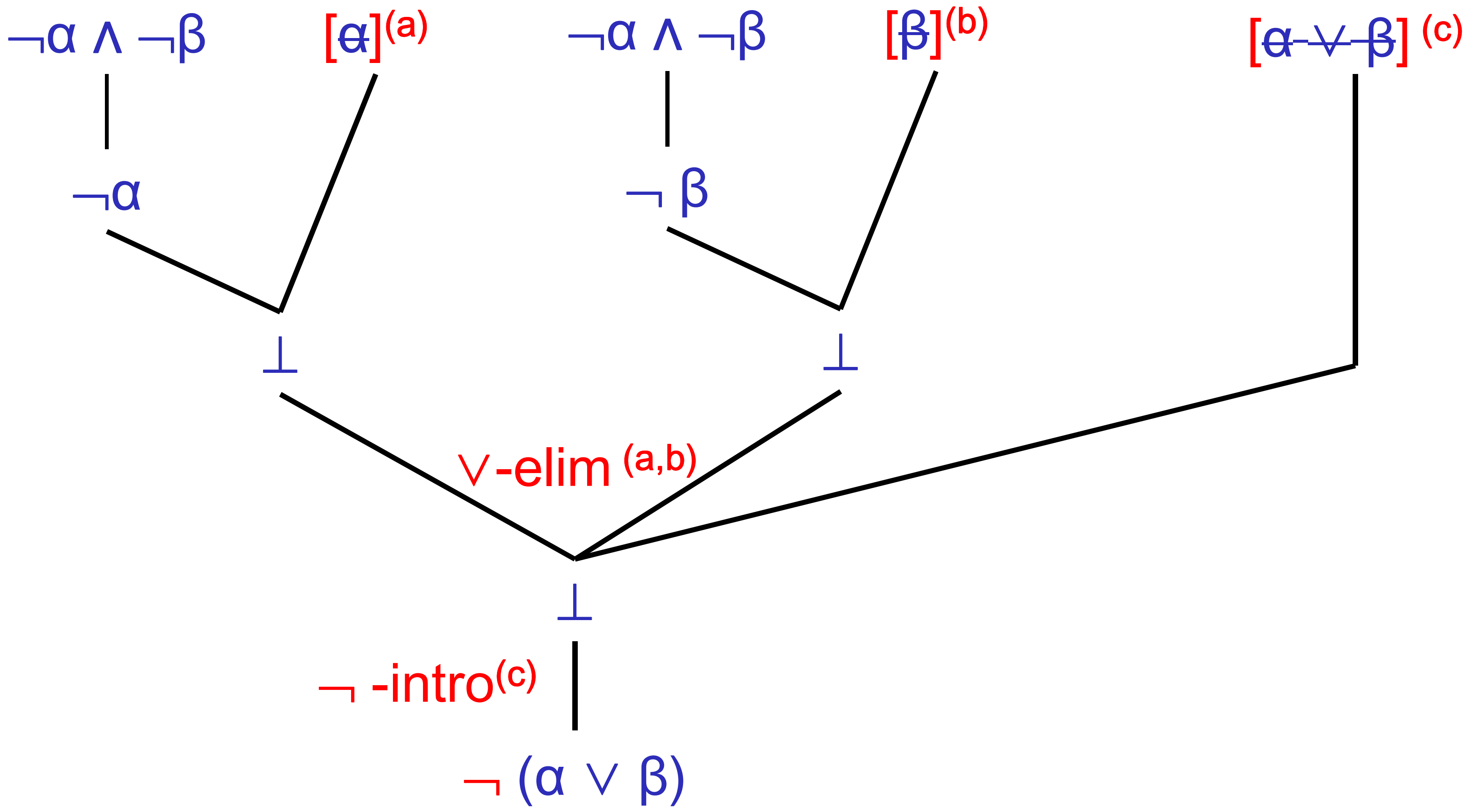


$\alpha \vee \beta$

Derivo una contraddizione da $\alpha \vee \beta$ scaricando α e β.



Derivo $\neg(\alpha \vee \beta)$ scaricando $(\alpha \vee \beta)$.



Anche in questa derivazione abbiamo applicato solo regole intuizioniste; essa è quindi anche intuizionisticamente valida.

Coq, in realtà, è capace di far tutto da solo!

```
Variable A B: Prop.
Theorem deMorgan1: ~(A \/ B) <-> ~A /\ ~B.
Proof.
tauto.
Qed.
```

Conclusione

La legge di de Morgan

$$\neg\ (\alpha \vee \beta) \equiv \neg\ \alpha \wedge \neg\ \beta$$

è valida sia classicamente che intuizionisticamente.

Consideriamo ora l'altra legge di de Morgan:

$$\neg\ (\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\ \alpha \vee \neg\ \beta$$

Legge 2 "diretta".

$$\neg(\alpha \land \beta) \quad \vdash \quad \neg\alpha \lor \neg\beta$$

Come costruire la derivazione.

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \ \vdash \ \neg\alpha \vee \neg\beta$$

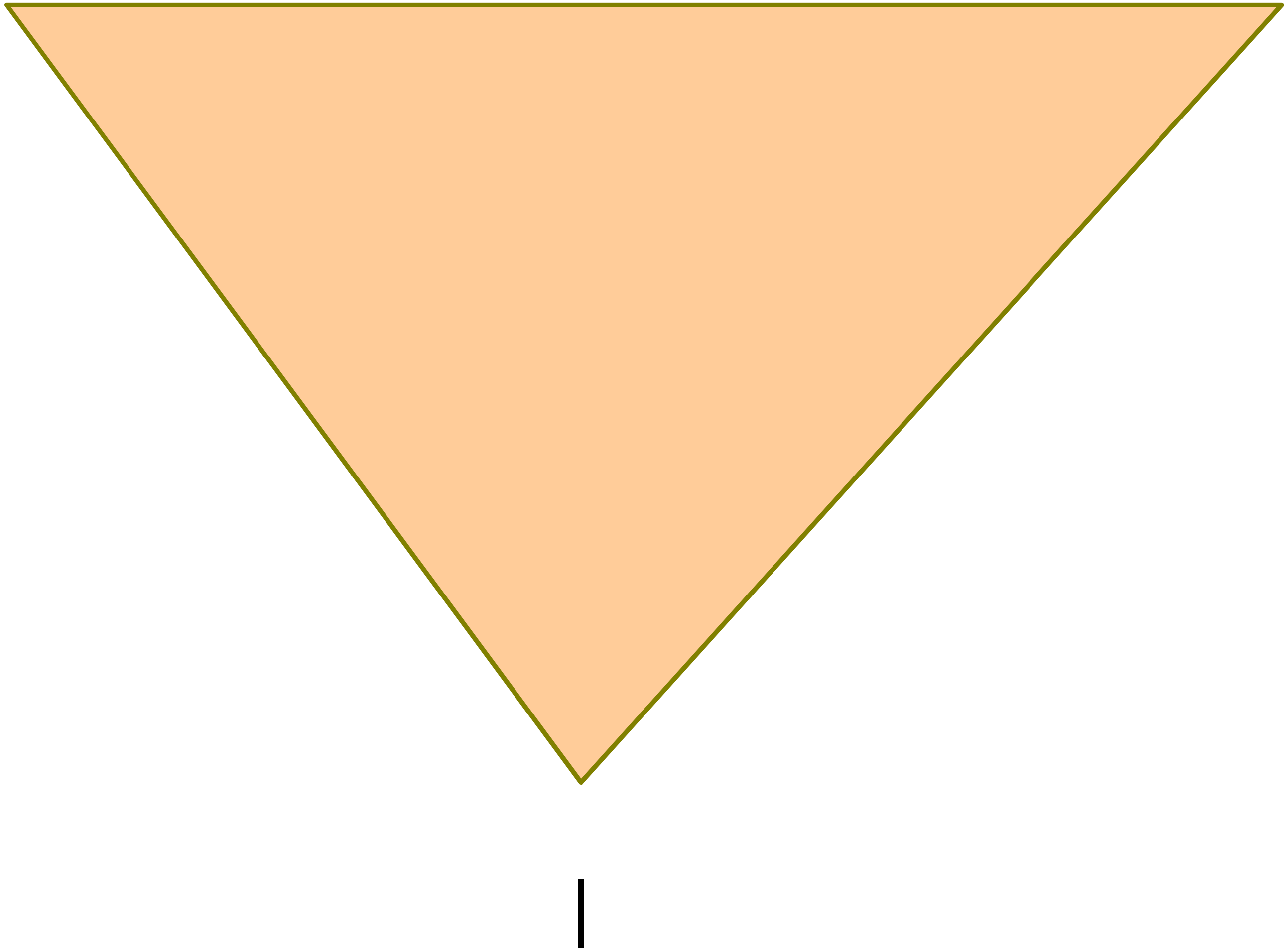
Questa relazione di deducibilità vale solo classicamente, ma non intuizionisticamente. Infatti, negando $(\alpha \wedge \beta)$, non diciamo se vale $\neg\alpha$ o se vale $\neg\beta$ o entrambi. Ne segue che possiamo (classicamente) affermare che vale la disgiunzione $\neg\alpha \vee \neg\beta$, ma non possiamo dire quali dei due disgiunti valga.

Bisognerà dunque usare la regola dell'assurdo classica (AC), cioè assumere la negata della conclusione, $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$, e da essa derivare una contraddizione con l'ipotesi $\neg(\alpha \wedge \beta)$.

Costruiamo prima, come al solito, la derivazione partendo dal basso, cioè dalla conclusione.

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$$

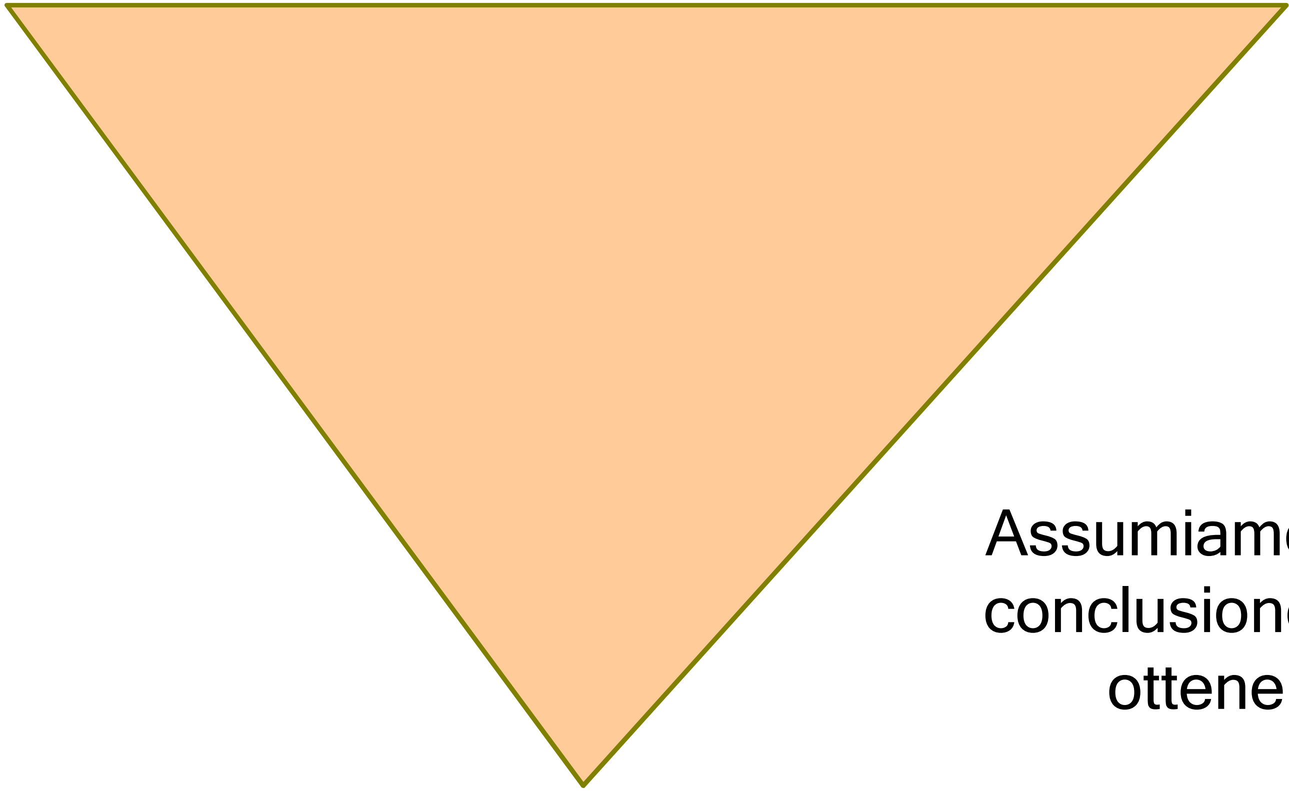
$\neg(\alpha \wedge \beta)$



$\neg\alpha \vee \neg\beta$

$$\neg(\alpha \land \beta) \vdash \neg\alpha \lor \neg\beta$$

$\neg(\alpha \land \beta)$ $[\neg(\neg\alpha \lor \neg\beta)]^{(n)}$



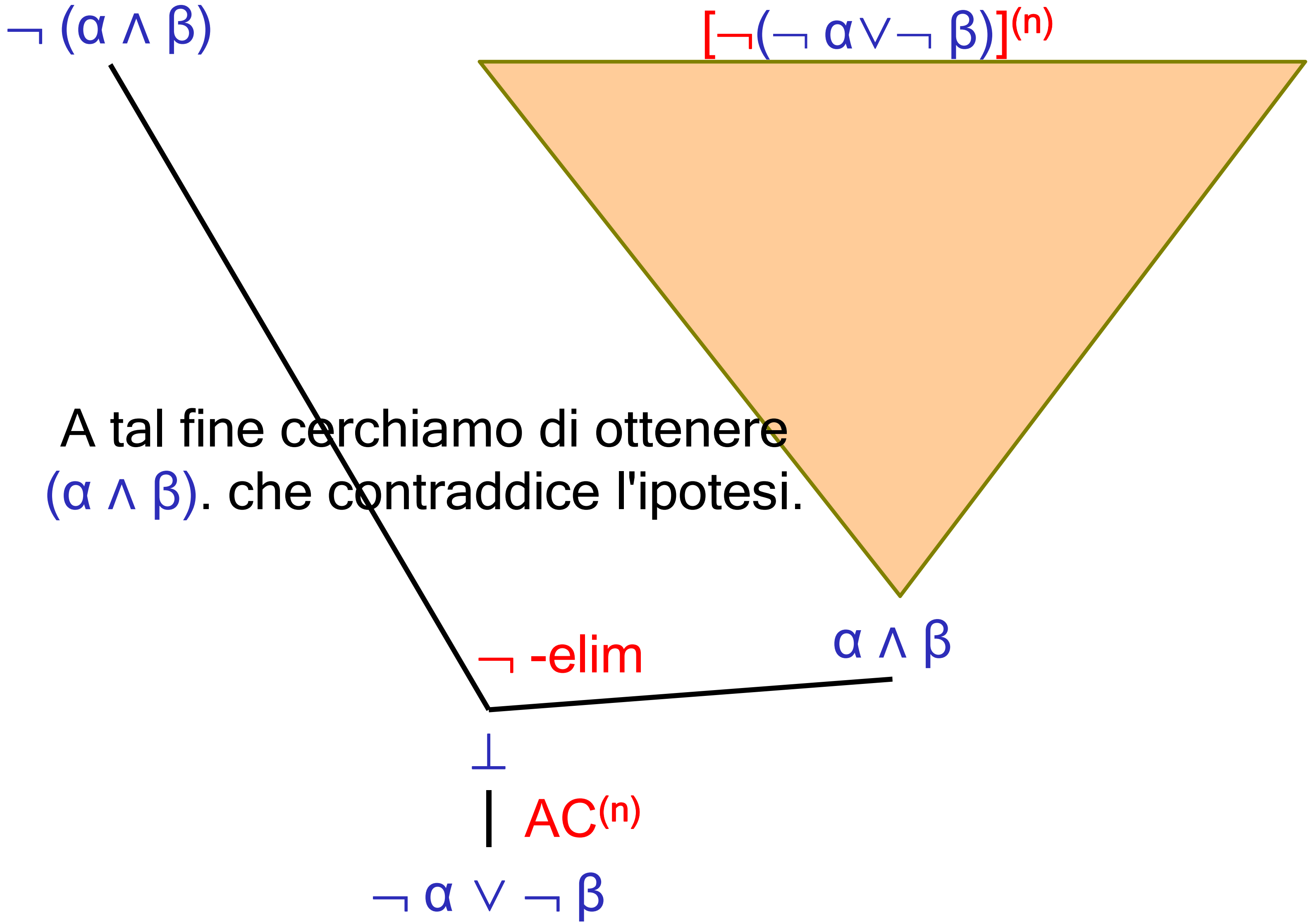
$\perp$

$\mid$ $AC^{(n)}$

$\neg\alpha \lor \neg\beta$

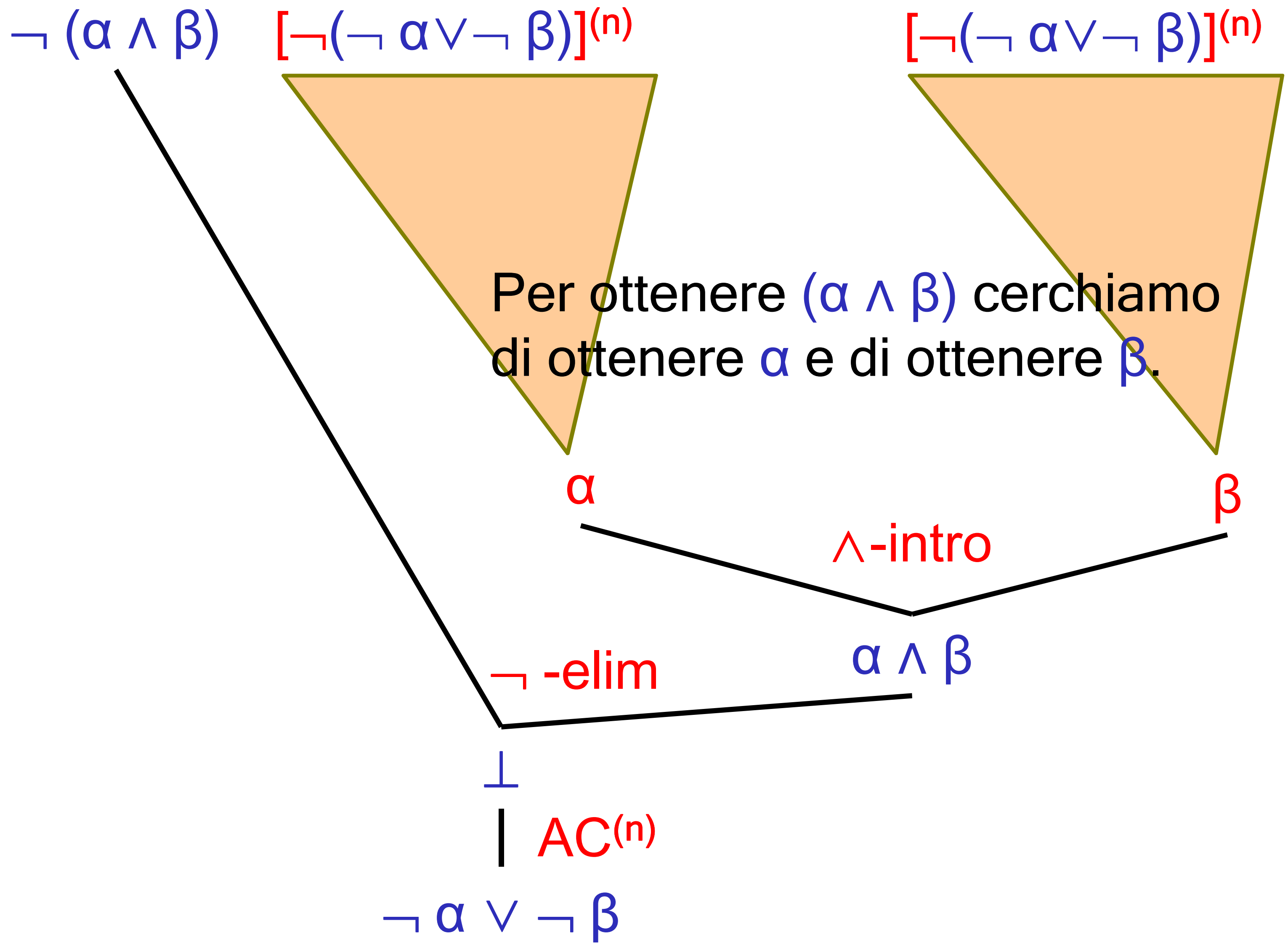
Assumiamo la negata della conclusione e cerchiamo di ottenere l'assurdo.

$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$

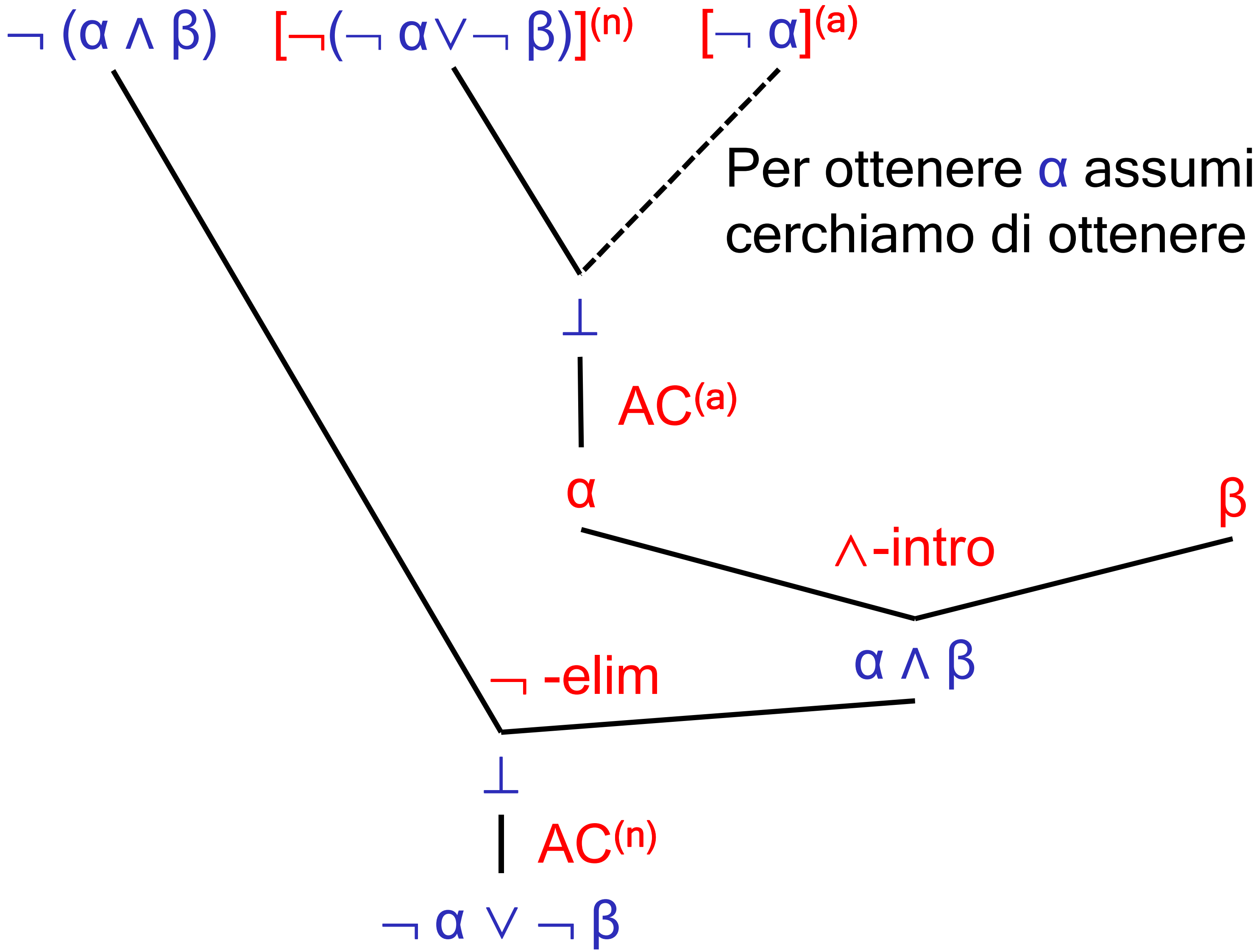


A tal fine cerchiamo di ottenere $(\alpha \wedge \beta)$. che contraddice l'ipotesi.

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$$

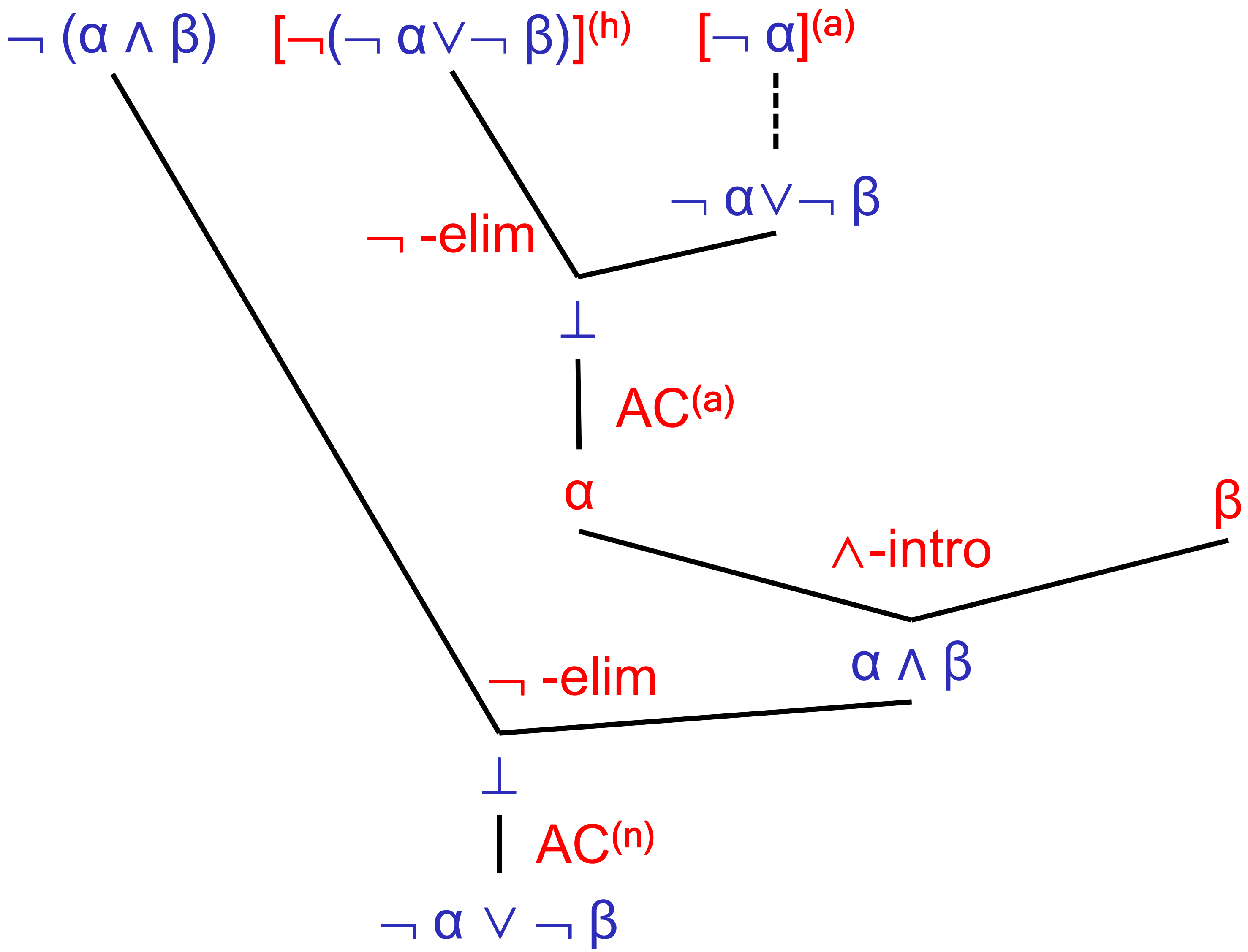


$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$

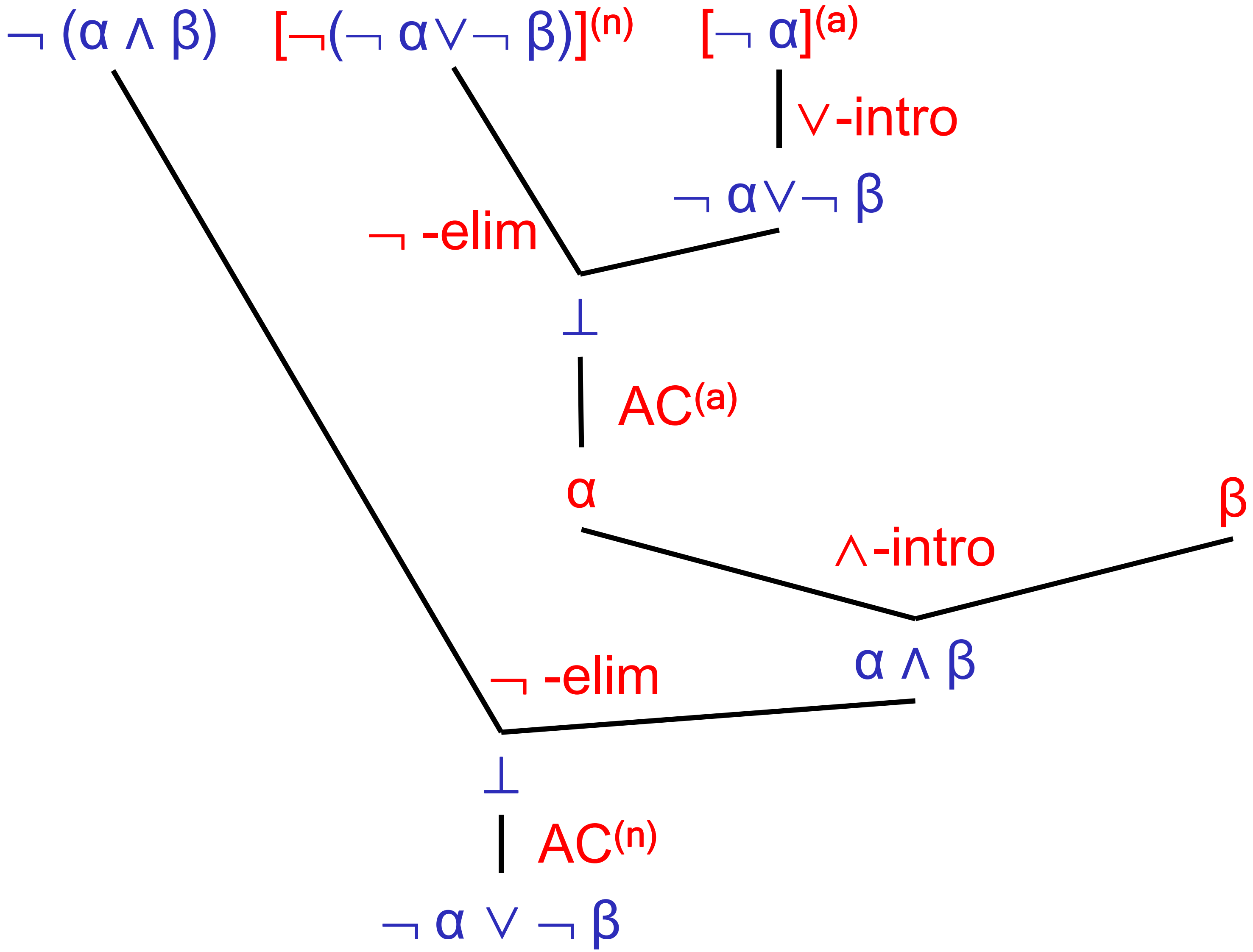


Per ottenere α assumiamo $\neg\alpha$ e cerchiamo di ottenere l'assurdo.

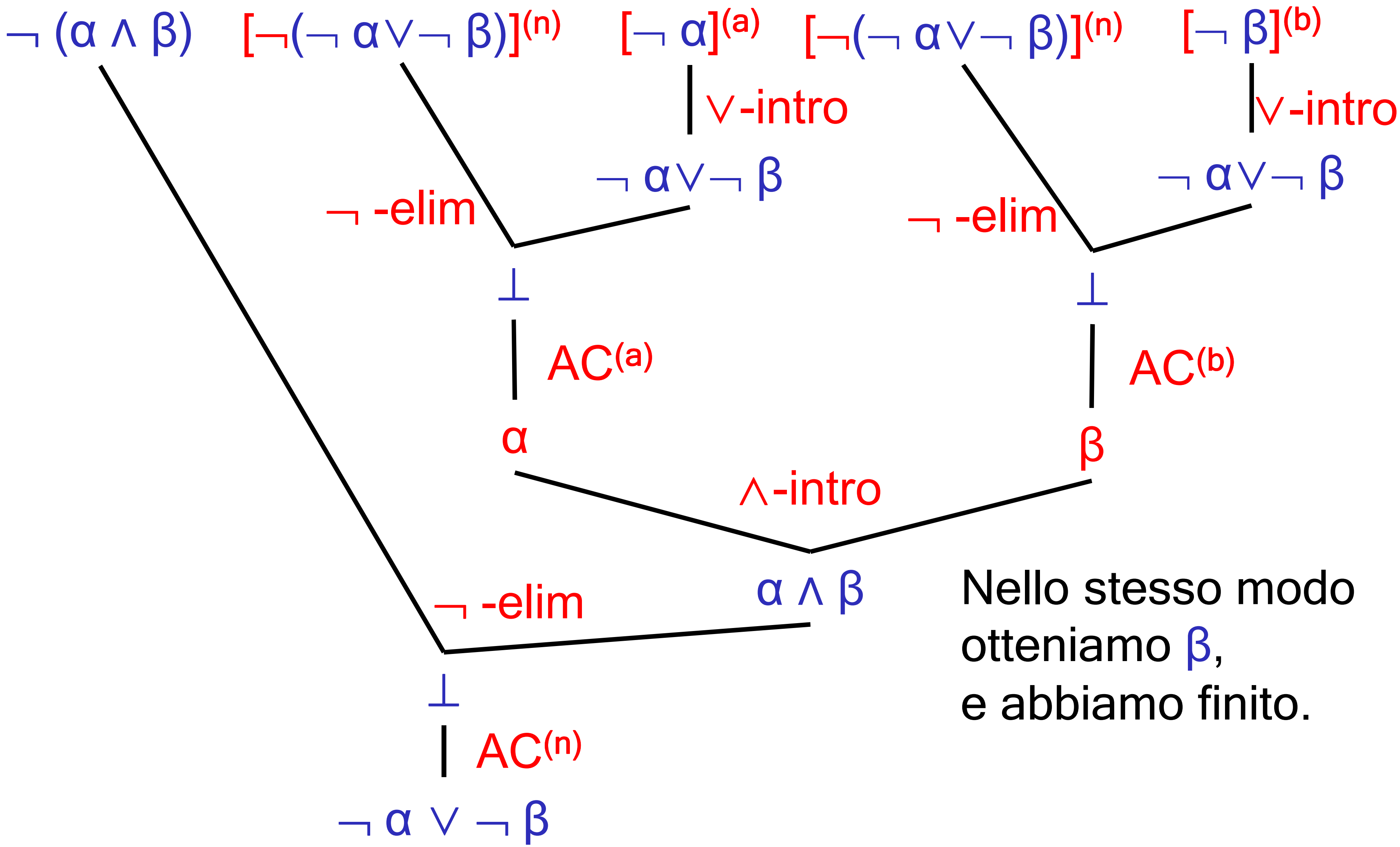
$$\neg(\alpha \wedge \beta) \;\vdash\; \neg\alpha \vee \neg\beta$$



$$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$$



$$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$$



Nello stesso modo
otteniamo β,
e abbiamo finito.

Costruzione della derivazione in Proofweb/Coq

```
Theorem deMorgan2:  ~(A /\ B) -> (~A \/ ~B).
Proof.
imp_i H.
PBC nt.
neg_e (A /\ B).
exact H.
con_i.
PBC na.
neg_e (~A \/ ~B).
exact nt.
dis_i1.
exact na.
PBC nb.
...
Qed.
```

Esercizio facile:
completare, al posto dei puntini, le istruzioni per costruire la derivazione.

L'albero generato da ProofWeb.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \land B)]^{H} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\neg A \lor \neg B)]^{nt} \quad \dfrac{[\neg A]^{na}}{\neg A \lor \neg B}\,\lor i_1}{\bot}\,\neg e}{A}\,\mathrm{PBC}[na] \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\neg A \lor \neg B)]^{nt} \quad \dfrac{[\neg B]^{nb}}{\neg A \lor \neg B}\,\lor i_2}{\bot}\,\neg e}{B}\,\mathrm{PBC}[nb]}{A \land B}\,\land i}{\bot}\,\neg e}{\neg A \lor \neg B}\,\mathrm{PBC}[nt]}{\neg(A \land B) \to \neg A \lor \neg B}\,\to i[H]
$$

Costruzione dell'albero partendo dall'alto.

Rifacciamo la costruzione dell'albero partendo dall'assunzione e arrivando alla conclusione, in modo da capire bene quali regole applichiamo.

$$\neg (\alpha \wedge \beta) \vdash \neg \alpha \vee \neg \beta$$

$\neg (\alpha \wedge \beta)$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$\neg(\alpha \wedge \beta)$ $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$\neg(\alpha \wedge \beta)$ $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ $\neg\alpha$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$\neg(\alpha \wedge \beta)$ $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ $\neg\alpha$

$$\frac{\neg\alpha}{\neg\alpha \vee \neg\beta}\ \vee\text{-intro}$$

$$\neg(\alpha \land \beta) \vdash \neg\alpha \lor \neg\beta$$

$\neg(\alpha \land \beta)$ $\qquad$ $\neg(\neg\alpha \lor \neg\beta)$ $\qquad$ $\neg\alpha$

$\lor$-intro

$\neg\alpha \lor \neg\beta$

$\bot$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$\neg(\alpha \wedge \beta)$ $\qquad$ $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ $\qquad$ $[\neg\alpha]^{(a)}$

$\vee$-intro

$\neg\alpha \vee \neg\beta$

$\perp$

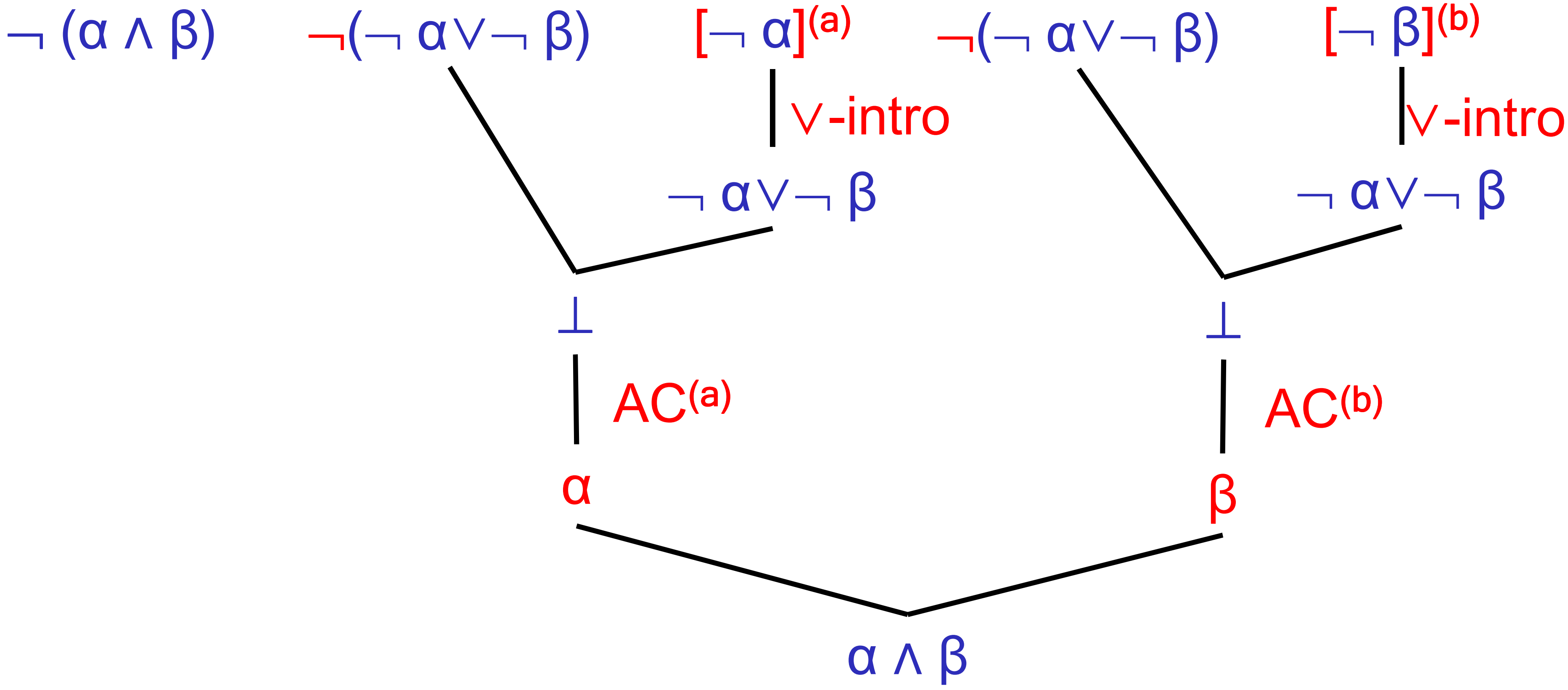
$\mathrm{AC}^{(a)}$

α

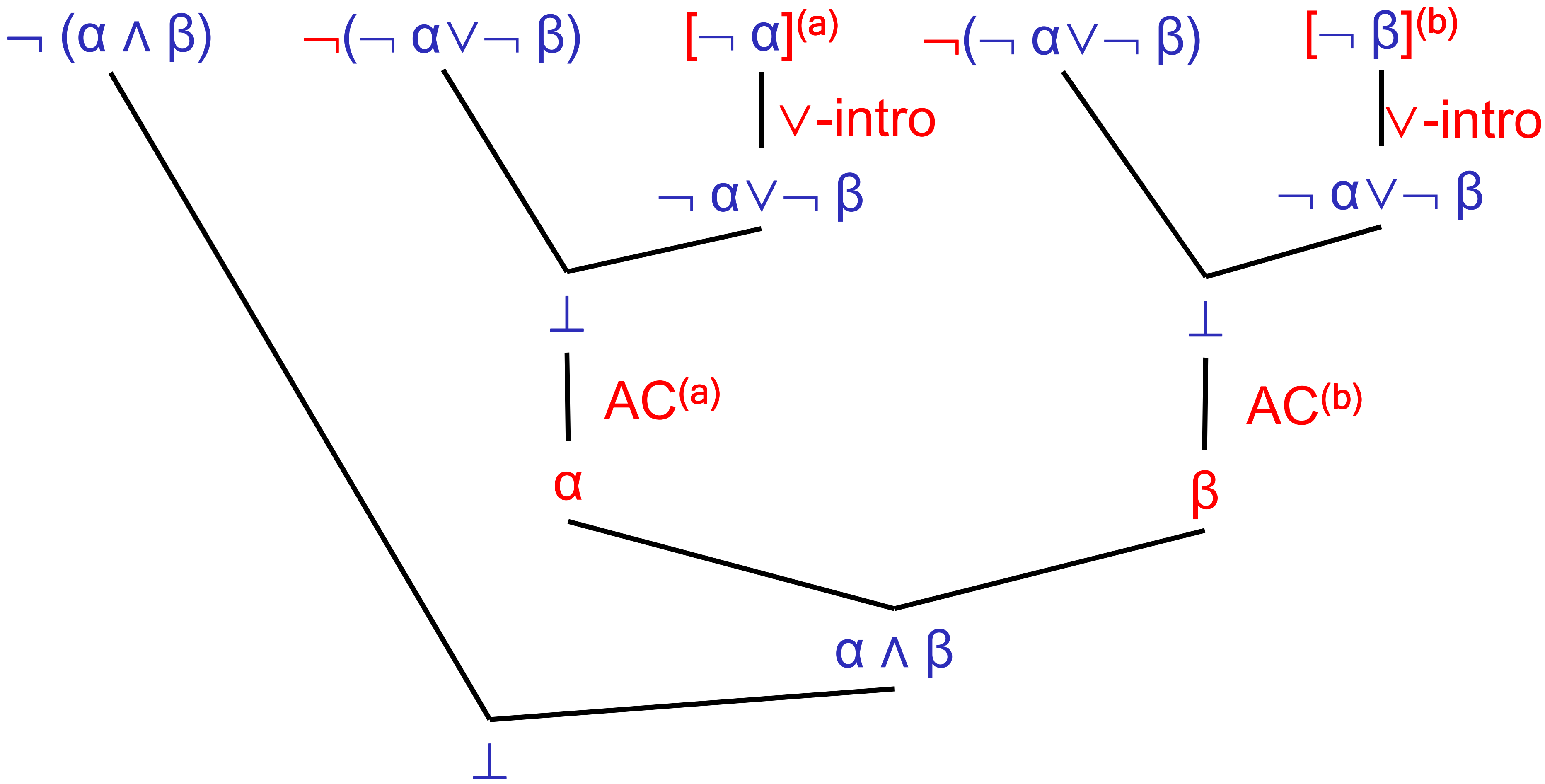
$$\neg(\alpha \wedge \beta) \ \vdash \ \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\neg\alpha\vee\neg\beta) \qquad \dfrac{[\neg\alpha]^{(a)}}{\neg\alpha\vee\neg\beta}\,\vee\text{-intro}}{\bot}}{\alpha}\,AC^{(a)} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\neg\alpha\vee\neg\beta) \qquad \dfrac{[\neg\beta]^{(b)}}{\neg\alpha\vee\neg\beta}\,\vee\text{-intro}}{\bot}}{\beta}\,AC^{(b)}$$

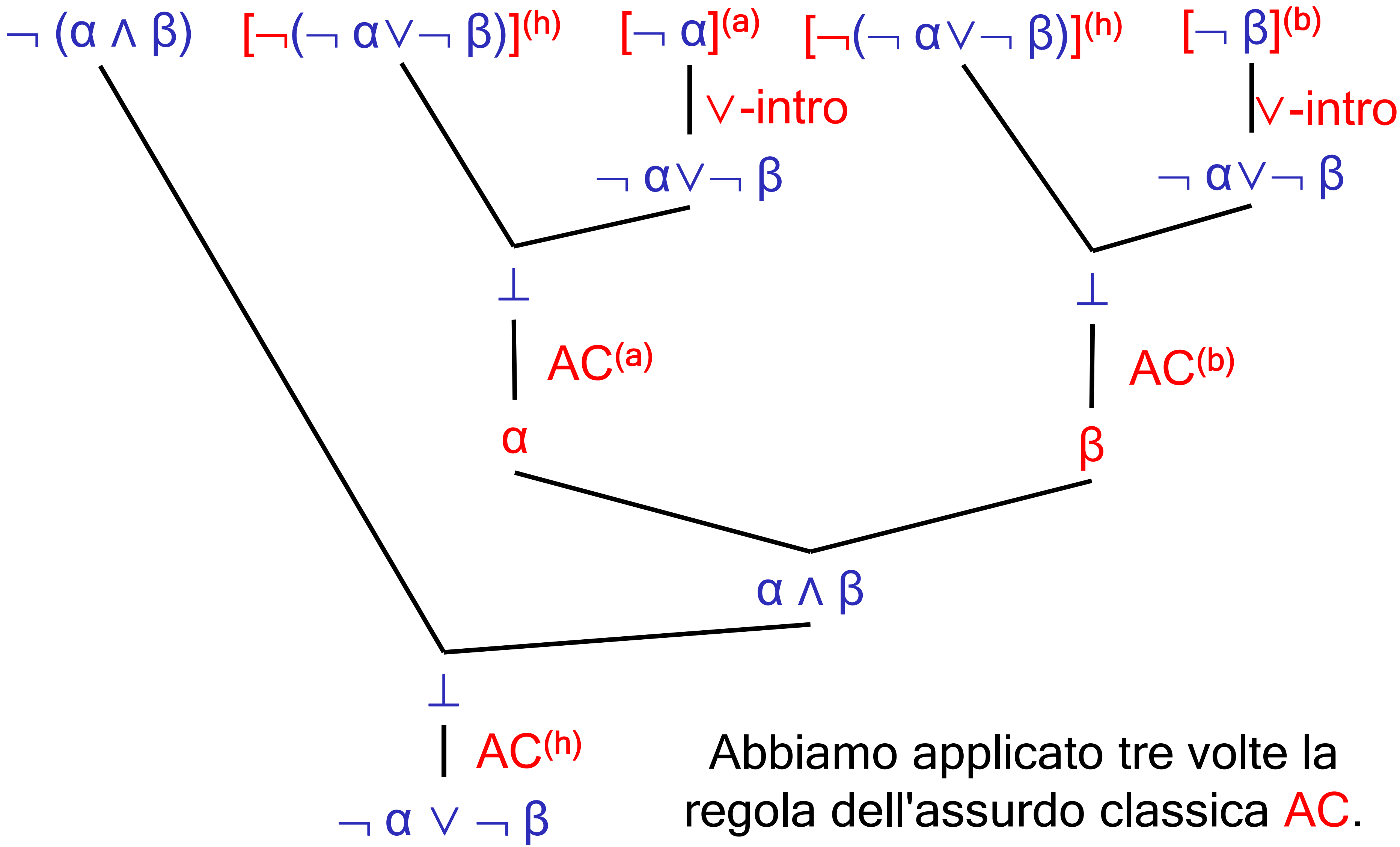
$$\neg(\alpha \land \beta) \vdash \neg\alpha \lor \neg\beta$$



$$\neg(\alpha \land \beta) \vdash \neg\alpha \lor \neg\beta$$



$\neg(\alpha \land \beta) \vdash \neg\alpha \lor \neg\beta$



Abbiamo applicato tre volte la regola dell'assurdo classica AC.

Esercizio

La derivazione inversa

$$\neg\, \alpha \lor \neg\, \beta \;\; \vdash \;\; \neg\, (\alpha \land \beta)$$

era l'esercizio di slide 39 (eventualmente prova a rifarlo).

Ricordiamo che in essa bisogna usare la regola $\lor$-elim, e che vengono applicate solo regole intuizionisticamente valide; quindi la derivazione è valida sia nella logica classica che in quella intuizionista.

Costruzione della derivazione in Proofweb/Coq

```
Variable A B: Prop.
Variable h: (~A \/ ~B).
Theorem deMorgan2_inv: ~(A /\ B).
Proof.
neg_i c.
dis_e (~A \/ ~B) na nb.
exact h.
neg_e A.
exact na.
con_e1 B.
exact c.
neg_e B.
exact nb.
con_e2 A.
exact c.
Qed.
```

L'albero generato da Proofweb

$$\dfrac{\dfrac{[?]^{h} \qquad \dfrac{[\neg A]^{na} \qquad \dfrac{[A \land B]^{c}}{A}\,\land e_1}{\bot}\,\neg e \qquad \dfrac{[\neg B]^{nb} \qquad \dfrac{[A \land B]^{c}}{B}\,\land e_2}{\bot}\,\neg e}{\bot}\,\lor e[na,nb]}{\neg(A \land B)}\,\neg i[c]$$

Riassunto

Riassumendo, delle quattro implicazioni

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg \alpha \vee \neg \beta)$$
$$(\neg \alpha \vee \neg \beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg \alpha \wedge \neg \beta)$$
$$(\neg \alpha \wedge \neg \beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$$

la prima è valida classicamente ma non intuizionisticamente,
le altre sono valide sia classicamente che intuizionisticamente.

Esercizio

Costruire la derivazione in ded. nat. della *contrapositio:*

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg \beta \to \neg \alpha)$$

(si tratta in realtà di due derivazioni, una per ciascun verso).