Da Aristotele al computer.

Elio Giovannetti
Dipartimento di Informatica
Università degli Studi di Torino

3. Introduzione alla logica predicativa.

versione 17/01/2015

I linguaggi della logica predicativa (del prim'ordine).

Un linguaggio logico predicativo ha due generi di espressioni:

- i termini, che indicano gli enti di cui si sta parlando, ad es. personaggi della Bibbia, numeri, variabili di un programma: *Dio, Eva, Abramo, Sara, Isacco, 6, π, cos 2.1, 2+3, 12/2, log 5, la madre di Abele, la madre di Caino, il padre di Isacco, il padre di x, ecc.*;

- le formule, che descrivono fatti riguardanti tali enti, e che (nella logica classica) possono essere vere o false, a seconda che i fatti asseriti sussistano oppure no, e a seconda dei "valori" delle eventuali variabili libere (vedi slides seguenti): *2 + 3 = 5, Abramo ama Sara, Abramo offre Isacco in sacrificio a Dio, 2 + 3 = 4, Caino ama Abele e per ogni x Dio ama x,* ecc.

Linguaggi predicativi: panoramica della sintassi.

- termini: si costruiscono a partire dalle variabili e dalle costanti per mezzo dei simboli funzionali o costruttori;
- formule: si costruiscono applicando predicati a termini (*formule atomiche*), e poi costruendo per mezzo dei quantificatori e dei connettivi proposizionali *formule composte*;
- le formule chiuse, cioè in cui non compaiono variabili libere (cioè non legate da un quantificatore), si chiamano proposizioni o enunciati; esse descrivono fatti indipendenti da valori assegnati a variabili, e sono quindi vere o false semplicemente a seconda che tali fatti sussistano o no.

I vocabolari dei linguaggi predicativi

Elementi di base (parole) di un linguaggio predicativo:

- variabili individuali: x, y, z, ...;
- costanti (o nomi proprii): 6, π, Eva, ...;
- simboli funzionali (o costruttori): padreDi, cos, +, ...;
- predicati (o simboli relazionali): ama, >, =, _offre_InSacrificioA_, ...;
- connettivi proposizionali: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$, ...;
- quantificatori: $\exists, \forall$;
- parentesi.

Le variabili devono essere in numero potenzialmente infinito, cioè si devono poter inventare tanti nomi distinti di variabili quanti si vuole.

Costanti, simboli funzionali e predicati sono in generale diversi da un linguaggio all'altro, e costituiscono il *vocabolario proprio* del linguaggio (vedi slide seguente).

I vocabolari propri dei linguaggi predicativi.

Supponiamo di aver fissato una volta per tutte i simboli logici, cioè di aver stabilito se la congiunzione si indica con AND oppure con $\wedge$, ecc., e di aver stabilito come si chiamano le variabili, cioè come si generano i loro nomi.

Un linguaggio predicativo particolare si definisce allora definendo il suo vocabolario proprio, cioè quali sono:

- le costanti;
- i costruttori (o simboli funzionali);
- i predicati.

Per ogni simbolo funzionale o predicato è necessario inoltre specificare:

- la sua arietà, cioè il numero di argomenti che esso richiede;
- eventualmente se sia in forma prefissa, infissa o postfissa.

Esempi

Un linguaggio biblico:
costanti: Adamo, Eva, Dio, Caino, Abele, ...;
simboli funzionali: padreDi *unario prefisso*, ...;
predicati: ama *binario infisso*, _offre_InSacrificioA_ *ternario infisso-a-pezzi*, ...

Un linguaggio matematico:
costanti: 6, π, 27, ecc.;
simboli funzionali: + *binario infisso*, cos *unario prefisso*, ! *unario postfisso*, ...;
predicati: >, <, = *(binari infissi)*, ecc.

Un linguaggio aritmetico … torinese (Peano):
costanti: 0;
simboli funzionali: s *unario prefisso*, +, $\times$, ...
predicati: =, >, ...;

Il significato dei quantificatori.

$\forall x.\varphi(x)$ = per tutti gli x vale $\varphi(x)$.

$\exists x.\varphi(x)$ = esiste almeno un x per cui vale $\varphi(x)$.

Attenzione alle sequenze di quantificatori!

Sia $ama(x, y)$ = x ama y.

$\exists x.\forall y.ama(x,y)$ = esiste un x tale che, per ogni y, x ama y, cioè esiste uno che ama tutti.

$\forall x.\exists y.ama(x,y)$ = per ogni x esiste un y tale che x ama y, cioè ognuno ama qualcuno (non necessariamente lo stesso).

$\exists y.\forall x.ama(x,y)$ = esiste un y tale che per ogni x, x ama y, cioè esiste uno che tutti amano;

$\forall y.\exists x.ama(x,y)$ = per ogni y esiste un x tale che x ama y, cioè ognuno ha qualcuno che lo ama.

Dalla lingua naturale ai quantificatori.

Sia uomo(x) = x è un uomo, corre(x) = x corre.

un uomo corre = esiste un x tale che x è un uomo e x corre =

$$\exists x.(uomo(x) \land corre(x))$$

tutti gli uomini corrono = per ogni x, se x è un uomo, x corre =

$$\forall x.(uomo(x) \rightarrow corre(x))$$

ogni uomo ama una donna = ? enunciato ambiguo

1) per ogni uomo c'è una donna - non per forza la stessa - che lui ama: $\forall x.(uomo(x) \rightarrow \exists y.(donna(y) \land ama(x, y)))$

2) c'è una donna che tutti gli uomini amano:

$$\exists y.(donna(y) \land \forall x.(uomo(x) \rightarrow ama(x, y)))$$

Nel discorso comune, dati i significati delle parole *uomo*, *donna*, *ama*, l'interpretazione 1 sembra la più naturale; con altre parole al posto di quelle, però, la più naturale potrebbe essere la 2.

Dalla lingua naturale ai quantificatori.

Ogni uomo ama una bella donna =

1) per ogni uomo c'è una bella donna - non necessariamente la stessa - che lui ama:

$$\forall x.(uomo(x) \rightarrow \exists y.(belladonna(y) \land ama(x, y)))$$

2) se una donna è bella, ogni uomo la ama:

$$\forall y.(belladonna(y) \rightarrow \forall x.(uomo(x) \rightarrow ama(x, y)))$$

Anche spezzando il predicato *belladonna* nei due predicati *bella* e *donna*, si hanno due enunciati analoghi:

1) $\forall x.(uomo(x) \rightarrow \exists y.(donna(y) \land bella(y) \land ama(x, y)))$

2) $\forall y.(donna(y) \land bella(y) \rightarrow \forall x.(uomo(x) \rightarrow ama(x, y)))$

Come si vede, la struttura sintattica della frase italiana è la stessa di quella della slide precedente, eppure l'interpretazione più naturale, la 2, è diversa da entrambe quelle della slide prec.

Quantificatori e matematica del liceo.

Nella matematica del liceo i quantificatori non vengono scritti, ma lasciati impliciti.

Un'uguaglianza come $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vale per tutti i valori di a e b: si tratta quindi di un enunciato universale:

$$\forall a. \forall b. ((a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2))$$

Un'equazione, come $x^2 - 2x -15 = 0$ è un enunciato esistenziale di cui si vuol sapere se sia vero o falso:

$$\exists x. (x^2 - 2x -15 = 0)$$

Risolvere l'equazione è un modo di dimostrare l'enunciato.

Quantificatori e nozione matematica di limite.

Consideriamo la funzione di variabile reale

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

definita per qualunque numero reale $x \neq 0$.

Come si comporta $f(x)$ al crescere di x, per x positivo?

Continua a crescere, avvicinandosi indefinitamente a 2 (senza raggiungerlo mai):

$x = 4$	$f(x) = 2 - ¼$	$= 1{,}75$
$x = 5$	$f(x) = 2 - 0{,}2$	$= 1{,}8$
$x = 10$	$f(x) = 2 - 0{,}1$	$= 1{,}9$
$x = 100$	$f(x) = 2 - 0{,}01$	$= 1{,}99$
$x = 1000$	$f(x) = 2 - 0{,}001$	$= 1{,}999$

...

Come esprimere in modo preciso tale fatto?

Con tre quantificatori! (vedi slide successiva).

Le definizioni "epsilon-c"

Per ogni numero $\varepsilon > 0$ (per quanto piccolo) esiste un valore c tale che, per ogni $x > c$, si ha $2 - f(x) < \varepsilon$.

Cioè: mi posso avvicinare a 2 di quanto voglio (ε), pur di prendere x sufficientemente grande ($x > c$).

Formalmente:

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists c.\ \forall x > c.\ 2 - f(x) < \varepsilon$$

che è un modo sintetico per scrivere:

$$\forall \varepsilon.(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists c.\ \forall x.\ (x > c \rightarrow (2 - f(x) < \varepsilon)\ ))$$

Esempio.

Voglio trovare valori di $f(x)$ tali che $2 - f(x) < \varepsilon$, con $\varepsilon = 0{,}0001$: allora basta prendere valori di $x > c$, con $c = 10000$.

Per ogni ε esiste un c:

per $\varepsilon = 0{,}001$ è $c = 1000$, per $\varepsilon = 0{,}0001$ è $c = 10000$, ecc.

La definizione di limite

Data una funzione f(x), si dice che per x tendente a infinito essa tende a un limite L se:
per ogni ε > 0 (per quanto piccolo) esiste un valore c tale che, per ogni x > c, si ha L - f(x) < ε, e si scrive:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \mathbf{L}$$

Diciamo quindi che la funzione $2 - \frac{1}{x}$ tende a 2 per x tendente a infinito; oppure che:

il limite di $2 - \frac{1}{x}$ per x tendente a infinito è 2.

In notazione formale:

$$\lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2$$

Variabili libere e variabili legate (o vincolate).

- occorrenza di una variabile x in una formula A: posizione in A in cui si trova la x (possono essercene più d'una);
- occorrenza legata: è una occorrenza di una variabile x entro il raggio d'azione di un quantificatore $(\forall x.\varphi)$ o $(\exists x.\varphi)$
- occorrenza libera: è una occorrenza non legata.

Una variabile avente occorrenze libere in una formula A si dice che occorre (o compare) libera in A.
Una variabile avente occorrenze legate in una formula A si dice che occorre (o compare) legata in A.

In una formula una variabile può comparire simultaneamente libera e legata, ad es.: $P(x) \wedge \forall x.Q(x)$

- formula chiusa o enunciato o proposizione: formula in cui non compaiono variabili libere;
- formula aperta: formula in cui compaiono variabili libere.

Note

- Una occorrenza di variabile legata in una formula è necessariamente libera in qualche sottoformula. Esempio banale:

  la variabile x, legata nella formula $\forall x\ .\ (x+1 > x)$,
  è libera nella sottoformula $x+1 > x$

- Un termine, non essendo una formula, non può contenere quantificatori; un'espressione come $\forall x.(x+1)$ è sintatticamente scorretta e non ha alcun significato. Sono pertanto giustificate le seguenti definizioni:
  - termine aperto: termine contenente variabili, es. $f(x)$, $x+1$;
  - termine chiuso: termine contenente solo costanti e simboli funzionali, es. $f(c)$, $3+2$, ecc.

Ridenominazione delle variabili legate

- Due formule che differiscono solo per i nomi delle variabili legate si considerano identiche, ad es.:

$$\forall x.(x+1 > x) \quad e \quad \forall y.(y+1 > y);$$

In una formula $(\forall x.\varphi)$ o $(\exists x.\varphi)$ è quindi sempre possibile ridenominare la variabile legata x, purché il nuovo nome non coincida con quello di una variabile libera che compare in A, poiché in tal caso si avrebbe la "cattura" di una variabile libera che diventerebbe legata. Esempio:

$\forall x.(x+y > x)$ è identica a $\forall z.(z+y > z)$

ma non a $\forall y. (y+y > y)$

(la prima formula dice che per ogni z si ha z+y > z,
la seconda dice solo che per ogni y si ha 2y > y).

Convenzione di Barendregt sulle variabili.

- Si assume che in una formula tutte le variabili legate abbiano nomi fra loro distinti, e distinti da quelli delle variabili libere.
- Una variabile non può quindi avere in una formula sia occorrenze libere che occorrenze legate. Esempio:

  la formula $P(x) \land \forall x.Q(x)$ non rispetta la convenzione; essa deve essere scritta come

  $$P(x) \land \forall y.Q(y)$$

- Altra conseguenza della convenzione: non si può avere, nel raggio d'azione di un quantificatore $\forall x$ o $\exists x$ un altro quantificatore $\forall x$ o $\exists x$ che lega una variabile dello stesso nome. Esempio:

  la formula $\forall x.(P(x) \to \forall x.Q(x))$ non rispetta la convenzione ed è difficile da capire; essa deve essere scritta come:

  $$\forall x.(P(x) \to \forall y.Q(y))$$

Sostituzione: notazioni diverse

Se φ è una formula, x una variabile, e t un termine, indichiamo con $\varphi[x := t]$ la formula che si ottiene da φ sostituendo in essa tutte le occorrenze libere di x con il termine t.

Al posto di $\varphi[x := t]$ sono molto usate due altre notazioni, che sono purtroppo l'una l'opposta dell'altra.

$\varphi[x := t]$ prof. Lolli: $\varphi[t /x]$ prof. Zambella: $\varphi[x / t]$

La definizione di sostituzione è delicata: bisogna infatti vietare che, per effetto di una sostituzione, variabili libere possano venire "catturate" da un quantificatore diventando legate.

Ciò tuttavia non può accadere se chiediamo che la convenzione di Barendregt valga per l'insieme $\{A, t\}$ di formula e termine, in particolare che le variabili legate di A siano tutte distinte dalle variabili di t (che per definizione sono tutte libere). La convenzione può esser fatta valere ridenominando le variabili legate.

Una notazione meno rigorosa ma più intuitiva

Indichiamo con $\varphi(x)$ una formula in cui *può* comparire libera la variabile x, e invece di $\varphi[x := t]$ scriviamo semplicemente $\varphi(t)$, cioè indichiamo con $\varphi(t)$ la formula che si ottiene da $\varphi(x)$ sostituendo tutte le occorrenze libere di x con il termine t.

Attenzione: le scritture $\varphi(x)$, $\varphi[x := t]$, $\varphi(t)$ non sono formule, ma indicano formule !

Nota: una formula indicata con $\varphi(x)$ può anche non contenere alcuna occorrenza libera di x; in tal caso $\varphi(t)$ ovviamente coincide con $\varphi(x)$.

Esempio: $\varphi(x) \equiv 17 < y \ \wedge \ y < 31 \ \wedge \ \forall x.\ \text{èPrimo}(x)$

$\varphi(7) \equiv 17 < y \ \wedge \ y < 31 \ \wedge \ \forall x.\ \text{èPrimo}(x)$

Logica dei predicati.

La nozione di conseguenza logica, nella logica dei predicati, non può essere definita per mezzo di tavole di verità, perché non si possono costruire tavole di verità per i quantificatori: esse sarebbero tavole di dimensione infinita (congiunzione infinita per l'universale, disgiunzione infinita per l'esistenziale).

P(a)	P(b)	P(c) …	P(s) …		∀x.P(x)	∃x.P(x)
F	F	F	F	…	F	F
T	F	F	F	…	F	T
…						
T	T	T	T	…	T	T

La tavola di verità dovrebbe contenere infinite colonne (una per ognuno degli infiniti elementi dell'universo) e quindi infinite righe.

Conseguenza logica ed equivalenza logica.

La logica predicativa è un'estensione di quella proposizionale, quindi i valori di verità degli enunciati ottenuti da enunciati più semplice tramite i connettivi proposizionali si ottengono ancora con le stesse tavole, ad esempio:

$\forall x.\varphi(x)$	$\forall x.\ \psi(x)$	$\forall x.\varphi(x) \vee \forall x.\psi(x)$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Se si ha a che fare con enunciati contenenti dei quantificatori, per stabilire relazioni di conseguenza logica da date premesse ad una conclusione, o di equivalenza logica tra enunciati, ci serviamo dell'usuale significato delle parole "tutti" e "qualcuno".

Predicati

Nella logica predicativa classica si assume che ogni predicato, di ogni arietà, sia definito su tutti gli elementi dell'universo del discorso.

Ad esempio, i predicati uomo(x) o ama(x, y) si devono intendere come aventi, per ciascun possibile elemento x o y, un ben preciso valore di verità T o F:

ama(Dante, Beatrice) = T, ama(Dante, Virgilio) = T, ama(Paolo, Francesca) = T, ama(Francesca, Paolo) = T, ama(Dante, Bonifacio) = F, ecc.

Non ci possono essere due individui per i quali il predicato non sia né vero né falso, o vero e falso: ama(Catullo, Lesbia) = ?

Si noti infine che non si assume che ogni elemento x dell'universo abbia un nome: l'universo del discorso può contenere elementi anonimi, che tuttavia contribuiscono a determinare il valore di verità di una formula quantificata.

Predicati e dominio del discorso.

Il dominio del discorso si assume sempre come non vuoto.

Ne segue che se un predicato $P(x)$ è vero per tutti gli elementi, allora è vero per almeno un elemento. Quindi dalla formula $\forall x.P(x)$ si ha, fra le conseguenze logiche, $\exists x.P(x)$.

Ossia, internalizzando la nozione di conseguenza tramite il connettivo implicazione, la formula

$\forall x.P(x) \rightarrow \exists x.P(x)$ o più in generale $\forall x.\varphi(x) \rightarrow \exists x.\varphi(x)$

è una formula logicamente valida.

Da "tutti corrono" consegue che "qualcuno corre".

Attenzione: invece da "tutti gli uomini corrono" non consegue né che qualcuno corre, né che c'è un uomo; potrebbe non esserci nessun uomo (ma ad esempio solo alberi), e in tal caso l'enunciato "tutti gli uomini corrono" è vacuamente vera (vedi slide successive).

Predicati e interpretazioni.

Nella logica predicativa non si può assumere che un predicato valga per almeno un individuo: dipende dal dominio del discorso e dall'interpretazione del predicato. Ad esempio se il dominio è quello degli animali reali, il predicato unario "è un ippogrifo", che possiamo scrivere ippogrifo(x), è falso per qualunque x.

Come la logica proposizionale, la logica dei predicati studia la nozione di conseguenza logica, senza far riferimento ad una interpretazione prestabilita.

Tramite la logica dei predicati si possono poi definire delle teorie, introducendo i cosiddetti assiomi propri della teoria, che quindi delimitano la classe delle interpretazioni possibili. Ad esempio, in una teoria dell'amor cortese, che

"a nullo amato amar perdona"

ci sarà l'assioma $\forall x.\ \forall y.(ama(x, y) \rightarrow ama(y, x))$

Interpretazione e conseguenza logica.

Informalmente, un enunciato è conseguenza logica di un insieme di premesse, se in tutte le interpretazioni in cui sono vere le premesse è vera anche la conclusione.

Che cos'è un'interpretazione? Nel caso della logica booleana era semplicemente un'assegnazione di valori di verità alle formule atomiche.

Nella logica predicativa un'interpretazione è, intuitivamente, un'assegnazione di valori di verità alle applicazioni di un predicato a elementi del dominio (anche quelli che non hanno nome nel linguaggio), cioè una sorta di "tavola di verità" infinita come quella immaginata in precedenza, oltre ad una corrispondenza fra nomi nel linguaggio ed elementi del dominio, ecc.:

ama(Dante, Beatrice) = T, ama(Dante, Bonifacio) = F, ecc.

Nella tradizionale semantica "model-theoretic" le nozioni di interpretazione e di conseguenza logica vengono definite per mezzo di nozioni di teoria degl'insiemi.

La teoria degl'insiemi è una teoria matematica che può essere rigorosamente definita per mezzo di regole e assiomi propri in un linguaggio logico.

Viene prima la matematica o prima la logica?

Un informatico forse risponderebbe che prima di tutto vengono i procedimenti di calcolo!

Implicazioni vacuamente vere.

Riprendiamo l'esempio di slide 19: "tutti gli uomini corrono", che scriviamo formalmente come

$$\forall x.(\mathrm{uomo}(x) \rightarrow \mathrm{corre}(x))$$

Consideriamo un'interpretazione in cui $\mathrm{uomo}(x)$ sia falso per ogni elemento x dell'universo, cioè un'interpretazione in un dominio in cui non ci sono uomini.

Allora, per qualunque elemento x, l'implicazione

$$\mathrm{uomo}(x) \rightarrow \mathrm{corre}(x)$$

ha, secondo la logica proposizionale, valore di verità T, perché l'antecedente è falso.

Dunque, in quell'interpretazione, la quantificazione universale di tale formula è vera; nella stessa interpretazione, la formula $\exists x.\mathrm{uomo}(x)$ è falsa, perché appunto non c'è nessun uomo.

Quindi da $\forall x.(\mathrm{uomo}(x) \rightarrow \mathrm{corre}(x))$ non consegue $\exists x.\mathrm{uomo}(x)$.

Quantificatori e negazione.

Nella logica dei predicati classica vale una sorta di generalizzazione delle leggi de Morgan:

se non per tutti gli x vale $\varphi(x)$, allora c'è qualche x per cui non vale $\varphi(x)$, e viceversa. Si ha allora l'equivalenza logica:

$$\neg\forall x.\varphi(x) \equiv \exists x.\neg\varphi(x)$$

e simmetricamente:

se non esiste un x per cui vale $\varphi(x)$, allora per tutti gli x vale non $\varphi(x)$. Si ha allora l'equivalenza logica:

$$\neg\exists x.\varphi(x) \equiv \forall x.\neg\varphi(x)$$

Inter-definibilità dei quantificatori.

Come nella logica proposizionale classica la congiunzione e la disgiunzione sono definibili l'una per mezzo dell'altra (e della negazione), così nella logica dei predicati classica i quantificatori sono, tramite la negazione, definibili l'uno per mezzo dell'altro (quindi nel linguaggio ne basterebbe uno solo).

Ad esempio: $\forall x.\varphi(x) \equiv \neg\exists x.\neg\varphi(x)$:

per tutti gli x vale $\varphi(x) \equiv$ non esiste un x per cui non valga $\varphi(x)$

e simmetricamente: $\exists x.\varphi(x) \equiv \neg\forall x.\neg\varphi(x)$:

esiste un x per cui vale $\varphi(x) \equiv$ non per tutti gli x non vale $\varphi(x)$

Proprietà dei quantificatori.

Il quantificatore universale commuta con la congiunzione, ma non con la disgiunzione.

È naturale, perché il quantificatore universale è una sorta di congiunzione infinita.

Esempio.

$\forall x.(\text{bianco}(x) \wedge \text{sfera}(x)) \equiv \forall x.\text{bianco}(x) \wedge \forall x.\text{sfera}(x))$

"ogni x è bianco ed è sferico" è equivalente a
"ogni x è bianco e ogni x è sferico"

Invece

$\forall x.(\text{bianco}(x) \vee \text{sfera}(x)) \not\equiv \forall x.\text{bianco}(x) \vee \forall x.\text{sfera}(x))$

"ogni x è bianco oppure sferico" ovviamente non equivale e "ogni x è bianco oppure ogni x sferico", cioè gli elementi sono tutti bianchi o tutti sferici.

Proprietà dei quantificatori.

Il quantificatore esistenziale commuta con la disgiunzione, ma non con la congiunzione.

È naturale, perché il quantificatore esistenziale è una sorta di disgiunzione infinita.

Esempio.

$\exists x.(\text{bianco}(x) \vee \text{sfera}(x)) \equiv \exists x.\text{bianco}(x) \vee \exists x.\text{sfera}(x))$

"c'è un elemento bianco o sferico" è equivalente a
"c'è un elemento bianco o c'è un elemento sferico"

Invece

$\exists x.(\text{bianco}(x) \wedge \text{sfera}(x)) \not\equiv \exists x.\text{bianco}(x) \wedge \exists x.\text{sfera}(x))$

"c'è un elemento bianco e sferico" ovviamente non equivale e "c'è un elemento bianco e c'è un elemento sferico", che possono essere distinti tra loro..

Deduzione naturale per il calcolo dei predicati.

Il sistema della deduzione naturale per il calcolo dei predicati si ottiene aggiungendo alle regole del calcolo proposizionale una regola di introduzione e una di eliminazione per ciascuno dei due quantificatori.

A seconda che l'aggiunta si faccia solo all'insieme delle regole intuizioniste oppure all'intero insieme delle regole classiche, si ottiene il calcolo dei predicati intuizionista oppure classico.

La differenza fra logica classica e logica intuizionista sta quindi solo nella presenza o assenza del tertium non datur o di una regola equivalente.

Esempio

Consideriamo l'enunciato:

$$\exists x.(\text{promosso}(x) \rightarrow \forall y.\text{promosso}(y))$$

cioè: c'è uno tale che, se è promosso lui, sono promossi tutti.
Facciamo vedere che, nella logica classica, l'enunciato è logicamente valido, cioè è vero in qualunque interpretazione.

Infatti:

1) nel caso in cui tutti sono promossi:
allora si può "attribuirne il merito" a uno qualunque (poiché il conseguente è vero, l'implicazione è vera in ogni caso);

2) nel caso in cui ci siano dei non promossi (almeno uno);
allora si può attribuire a uno di questi "la colpa" della non promozione anche degli altri, perché se scegliamo un x per cui promosso(x) è falso, allora l'antecedente dell'implicazione è falso e quindi l'implicazione è vera.

Esempio

L'enunciato considerato

$$\exists x.(\text{promosso}(x) \rightarrow \forall y.\text{promosso}(y))$$

è un tipico esempio di enunciato esistenziale la cui validità si ottiene mediante un ragionamento "non costruttivo", nel senso che abbiamo dimostrato che un tale studente esiste, ma non siamo (purtroppo …) in grado di indicare a priori di chi si tratti! L'enunciato infatti non è valido intuizionisticamente.

Nel sistema di deduzione naturale esso può essere derivato soltanto usando una regola classica.

Regole per il quantificatore universale: definizione informale.

$\forall$-intro

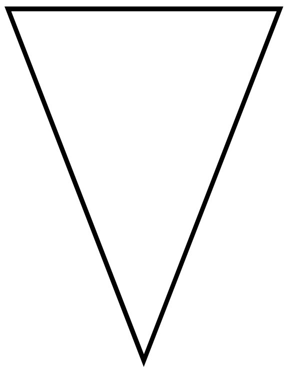
Se si riesce a dimostrare che vale $\varphi(z)$ senza aver fatto alcuna assunzione riguardante z, allora si è dimostrato che $\varphi(z)$ vale per uno z qualunque, cioè per tutti gli z.

$\forall$-elim

Se (si è dimostrato che) per tutti gli x vale $\varphi(x)$ e se t è un termine, denotante un individuo, allora φ vale in particolare per t.

Regole per il quantificatore universale

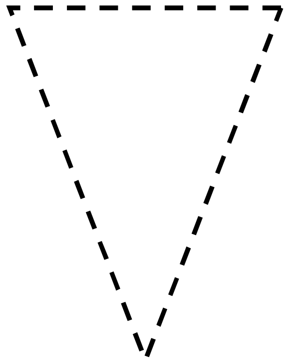
z non compare (libero) in assunzioni non scaricate



$$\frac{\varphi(z)}{\forall x.\varphi(x)}$$

∀-intro

x è, per comodità, una variabile nuova



$$\frac{\forall x.\varphi(x)}{\varphi(t)}$$

∀-elim

(con opportune condizioni sui nomi delle variabili per evitare errori dovuti a "catture")

Regole per il quantificatore esistenziale: ∃-intro

$$\dfrac{\varphi(t)}{\exists x.\ \varphi(x)}\ \exists\text{-intro}$$

Se (si è dimostrato che) φ vale per un certo individuo t, allora (si è dimostrato che) esiste un individuo per cui φ vale.

È una regola che "fa perdere informazione", perché "nasconde" l'individuo per cui φ vale (detto anche *testimone* di ∃x. φ(x)).

(con opportune condizioni sui nomi delle variabili per evitare errori dovuti a "catture").

Regole per il quantificatore esistenziale: $\exists$-elim

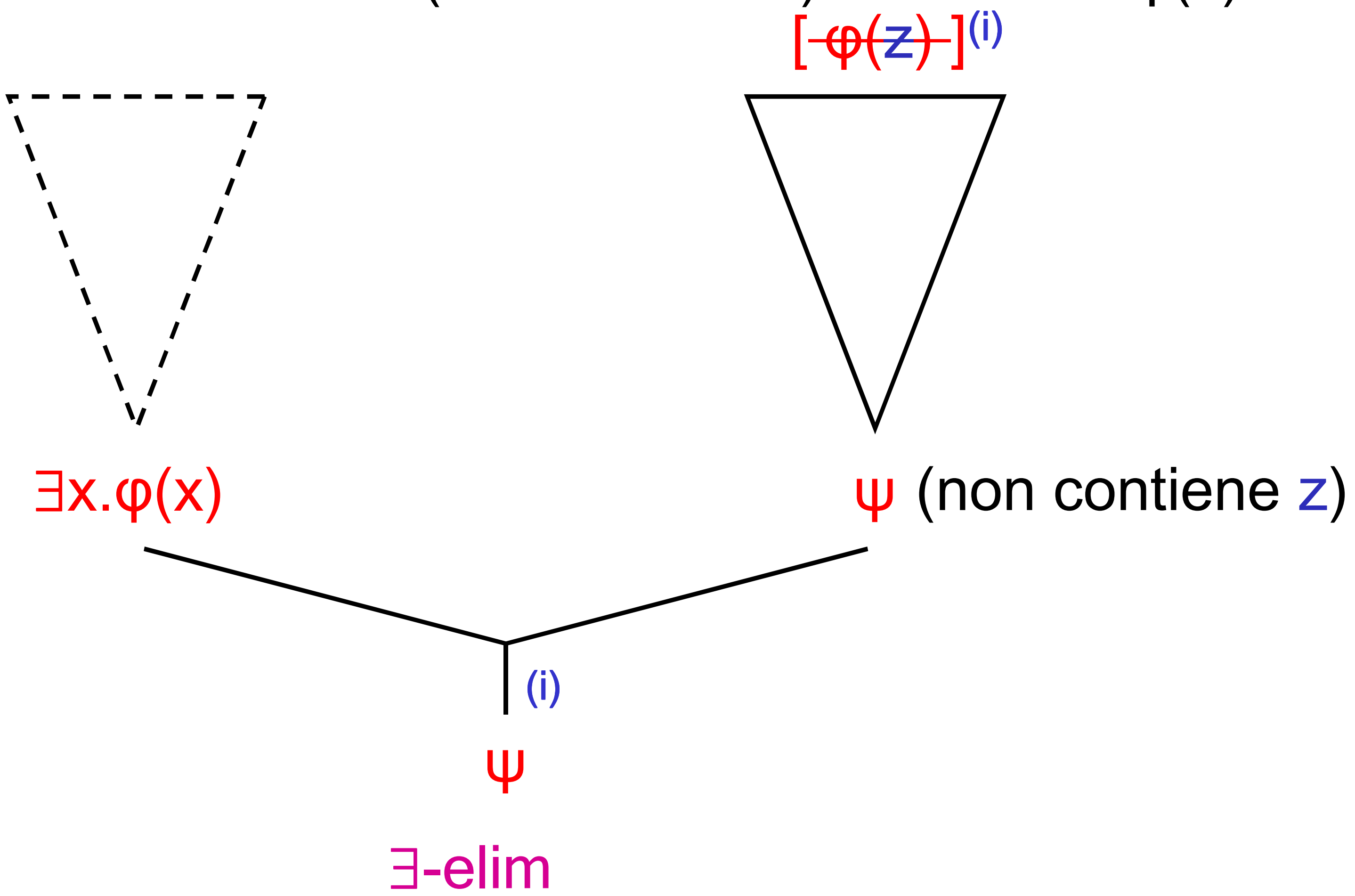
Da $\exists x.\varphi(x)$ si deduce immediatamente ψ se si può dedurre ψ dall'esistenza di un qualunque z per cui $\varphi(z)$, e se ψ non contiene z.

Detto in altro modo:

Se, assumendo che φ valga per un individuo z su cui non si fanno altre assunzioni, si riesce a dedurre una formula ψ che non menziona z, allora si è dedotto ψ dalla semplice esistenza di un individuo per cui valga φ, cioè da $\exists x.\varphi(x)$.

Regole per il quantificatore esistenziale: ∃-elim

z non compare (libero) in altre assunzioni (non scaricate) diverse da φ(z)



Deduzione naturale

Come nella logica proposizionale, anche nella logica dei predicati per indicare che dalle assunzioni $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ si è ottenuta per mezzo di un albero di deduzione una conclusione τ come radice dell'albero, scriviamo

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \vdash \tau$$

e diciamo che da $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ si deriva o si deduce τ.

Esempio di deduzione naturale.

Tutti gli uomini sono mortali: $\forall x.(\text{uomo}(x) \to \text{mortale}(x))$
Socrate è un uomo: $\text{uomo}(\text{Socrate})$.

$$
\dfrac{\text{uomo}(\text{Socrate}) \qquad \dfrac{\forall x.(\text{uomo}(x) \to \text{mortale}(x))}{\text{uomo}(\text{Socrate}) \to \text{mortale}(\text{Socrate})}\ \forall\text{-elim}}{\text{mortale}(\text{Socrate})}\ \to\text{-elim}
$$

Conclusione: Socrate è mortale. Abbiamo cioè stabilito che:

$\forall x.(\text{uomo}(x) \to \text{mortale}(x)),\ \text{uomo}(\text{Socrate}) \vdash \text{mortale}(\text{Socrate})$

Un altro esempio elementare

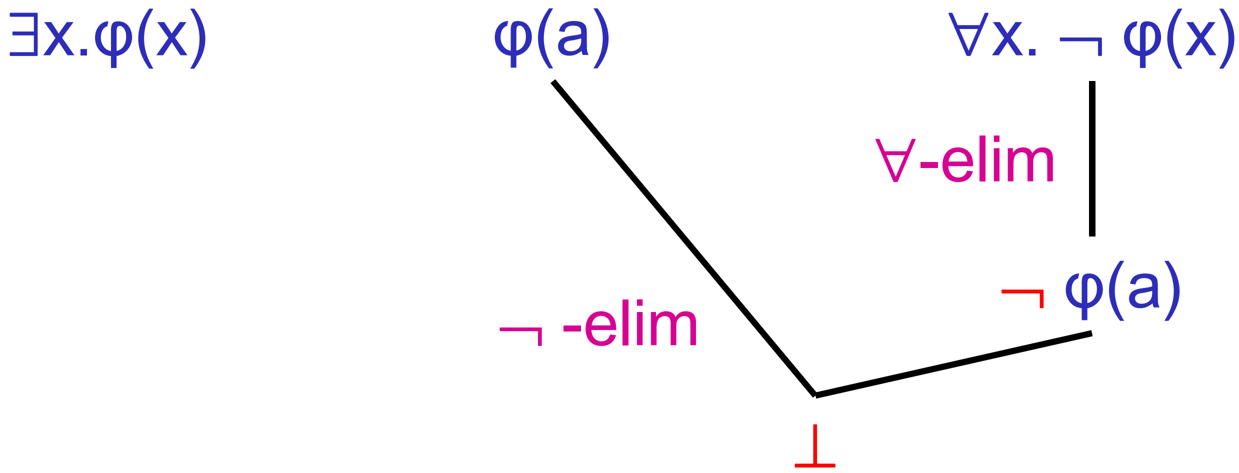
$$\exists x.\varphi(x) \vdash \neg \forall x. \neg \varphi(x)$$

Il ragionamento "naturale" è il seguente:

- assumiamo l'enunciato di cui si vuol dimostrare la negazione:
$$\forall x. \neg \varphi(x)$$
- assumiamo che l'individuo per cui vale φ sia a, cioè assumiamo che valga $\varphi(a)$ per un certo a;
- dall'assunzione $\forall x. \neg \varphi(x)$ otteniamo subito $\neg \varphi(a)$, che con $\varphi(a)$ genera una contraddizione;
- poiché assumendo $\forall x. \neg \varphi(x)$ si ottiene una contraddizione, abbiamo dimostrato la sua negazione: $\neg \forall x. \neg \varphi(x)$;
- l'enunciato è stato dimostrato assumendo che φ valga per un generico individuo a, ma esso non dipende dall'individuo a:
- possiamo quindi sostituire all'assunzione $\varphi(a)$ la più generica assunzione $\exists x.\varphi(x)$.

Formalmente:

$\exists x.\varphi(x) \vdash \neg \forall x. \neg \varphi(x)$



Formalmente:

$$\exists x.\varphi(x) \vdash \neg \forall x. \neg \varphi(x)$$

$$\exists x.\varphi(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi(a) \qquad \dfrac{[\cancel{\forall x. \neg \varphi(x)}]^{(1)}}{\neg \varphi(a)}\ \forall\text{-elim}}{\perp}\ \neg\text{-elim}}{\neg\forall x. \neg\varphi(x)}\ \neg\text{-intro}^{(1)}$$

Formalmente:

$$\exists x.\varphi(x) \vdash \neg \forall x. \neg \varphi(x)$$

$$\dfrac{\exists x.\varphi(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{[\varphi(a)]}^{(2)} \qquad \dfrac{\cancel{[\forall x. \neg \varphi(x)]}^{(1)}}{\neg \varphi(a)}\ \forall\text{-elim}}{\bot}\ \neg\text{-elim}}{\neg\forall x. \neg\varphi(x)}\ \neg\text{-intro}^{(1)}}{\neg\forall x. \neg\varphi(x)}\ \exists\text{-elim}^{(2)}$$

Sono state applicate solo regole intuizionisticamente valide, quindi la deduzione è valida anche nella logica intuizionista.

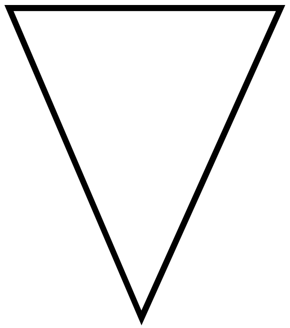
Un enunciato logicamente valido

Potremmo internalizzare la relazione di deduzione stabilita per i due enunciati precedenti, estendendo la derivazione con una applicazione della $\rightarrow$-intro.

Otteniamo in tal modo l'enunciato logicamente valido

$$\exists x.\varphi(x) \rightarrow \neg \forall x.\neg \varphi(x)$$

$$[\exists x.\varphi(x)]$$



$$\neg\forall x.\neg\varphi(x)$$

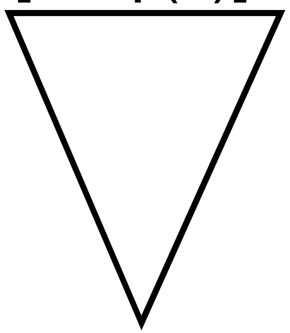
Un enunciato logicamente valido

Potremmo internalizzare la relazione di deduzione stabilita per i due enunciati precedenti, estendendo la derivazione con una applicazione della $\rightarrow$-intro.

Otteniamo in tal modo l'enunciato logicamente valido

$$\exists x.\varphi(x) \rightarrow \neg \forall x.\neg \varphi(x)$$

$$[\cancel{\exists x.\varphi(x)}]^{(1)}$$



$$\neg\forall x.\neg\varphi(x)$$

$\rightarrow$-intro$^{(1)}$

$$\exists x.\varphi(x) \rightarrow \neg \forall x.\neg \varphi(x)$$

Come si costruisce una derivazione?

La dimostrazione di un teorema in realtà viene costruita al contrario: si parte dal teorema, e si cercano degli enunciati più semplici da cui il teorema derivi. Poi si provano a dedurre tali enunciati da altri, e così via, applicando le regole di inferenza al contrario, fino a risalire alle assunzioni.

Anche i sistemi di dimostrazione assistita da computer (proof assistants) e i cosiddetti linguaggi di programmazione logica funzionano in questo modo.

L'esempio sviluppato al contrario.

$$\exists x.\varphi(x) \vdash \neg \forall x. \neg \varphi(x)$$

$\exists x.\varphi(x)$ premessa

conclusione $\neg\forall x. \neg\varphi(x)$

L'esempio sviluppato al contrario.

$$\exists x.\varphi(x) \vdash \neg \forall x. \neg \varphi(x)$$

$\exists x.\varphi(x)$ $\quad\quad$ $\cancel{[\varphi(a)]}^{(H1)}$

$\neg\forall x. \neg\varphi(x)$

$\exists$-elim$^{(H1)}$

$\neg\forall x. \neg\varphi(x)$

Proviamo la $\exists$-elim:
chiamiamo a un individuo
per cui vale $\varphi(a)$ e proviamo
a derivare il teorema da $\varphi(a)$

L'esempio sviluppato al contrario.

$$\exists x.\varphi(x) \vdash \neg \forall x. \neg \varphi(x)$$

$\exists x.\varphi(x)$ $\quad$ $\cancel{[\varphi(a)]}^{(H1)}$ $\quad$ $\cancel{[\forall x. \neg \varphi(x)]}^{(H0)}$

$\perp$

$\neg$ -intro$^{(H0)}$

$\neg\forall x. \neg\varphi(x)$

$\exists$-elim$^{(H1)}$

$\neg\forall x. \neg\varphi(x)$

La $\neg\forall x. \neg\varphi(x)$ inizia con $\neg$: allora proviamo a derivarla tramite una $\neg$ -intro

L'esempio sviluppato al contrario.

$$\exists x.\varphi(x) \vdash \neg\, \forall x.\, \neg\, \varphi(x)$$

$$\cancel{[\forall x.\, \neg\, \varphi(x)]}^{(H0)}$$

$$\dfrac{\exists x.\varphi(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{[\varphi(a)]}^{(H1)} \qquad \neg\, \varphi(a)}{\perp}\ \neg\text{-elim}}{\neg\forall x.\, \neg\varphi(x)}\ \neg\text{-intro}^{(H0)}}{\neg\forall x.\, \neg\varphi(x)}\ \exists\text{-elim}^{(H1)}$$

Per derivare $\perp$ dobbiamo usare una $\neg$ -elim

L'esempio sviluppato al contrario.

$$\exists x.\varphi(x) \vdash \neg \forall x. \neg \varphi(x)$$

$$\dfrac{\exists x.\varphi(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{[\varphi(a)]}^{(H1)} \qquad \dfrac{\cancel{[\forall x. \neg \varphi(x)]}^{(H0)}}{\neg \varphi(a)}\,\forall\text{-elim}}{\bot}\,\neg\text{-elim}}{\neg\forall x. \neg\varphi(x)}\,\neg\text{-intro}^{(H0)}}{\neg\forall x. \neg\varphi(x)}\,\exists\text{-elim}^{(H1)}$$

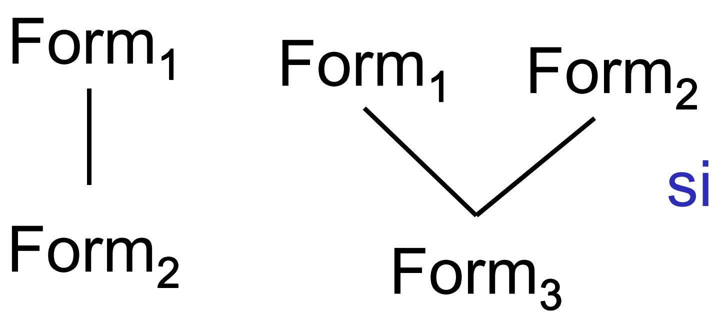
La formula $\neg \varphi(a)$ si deriva dall'assunzione $\forall x.\neg \varphi(x)$ che è stata introdotta in un passo precedente.
Derivazione completata!

La dimostrazione formalizzata.

La correttezza della derivazione può essere controllata per mezzo di un proof assistant, cioè un sistema di dimostrazione assistita da computer, come il francese Coq o l'italiano Matita.

Si parte dalla conclusione del teorema, e attraverso una serie di comandi, la cui correttezza viene appunto controllata dal sistema, si costruisce all'indietro la dimostrazione, esattamente come nelle slides precedenti, fino ad arrivare alle assunzioni.

Per comodità tipografica, nei libri di logica gli alberi di deduzione vengono rappresentati disegnando, al posto dei rami, delle semplici righe orizzontali nel modo seguente:



si scrivono

$$\frac{Form_1}{Form_2} \qquad \frac{Form_1 \qquad Form_2}{Form_3}$$

La derivazione in Coq con ProofWeb

Require Import ProofWeb.

Parameter P : D -> Prop.

Hypothesis H: exi x, P x. cioè $\exists x.\varphi(x)$

Theorem Quant1: ~ all x, ~ P x. cioè $\neg \forall x. \neg \varphi(x)$

Proof.

exi_e (exi x, P x) a H1. cioè $\exists$-elim creando l'assunzione H1

exact H. e usando l'ipotesi H

neg_i H0. cioè $\neg$ -intro creando l'assunzione H0

neg_e (P a). cioè $\neg$ -elim

all_e (all x, ~ P x). cioè $\forall$-elim

exact H0.

exact H1.

Qed.

L'albero generato automaticamente da ProofWeb

$$\dfrac{[?]^{H} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x,\ \neg P\ x]^{H0}}{\neg P\ a}\,\forall e \qquad [P\ a]^{H1}}{\bot}\,\neg e}{\neg \forall x,\ \neg P\ x}\,\neg i\,[H0]}{\neg \forall x,\ \neg P\ x}\,\exists e\,[H1]$$

È lo stesso albero disegnato nelle slides precedenti: l'unica differenza è che il sistema non ha riscritto l'assunzione, indicata semplicemente con un punto interrogativo.

Un altro esempio: la derivazione opposta.

$$\neg \forall x. \neg \varphi(x) \vdash \exists x.\varphi(x)$$

$\neg\exists x.\varphi(x)$ $\qquad$ $\varphi(a)$ $\qquad$ $\neg\forall x. \neg\varphi(x)$

$$\dfrac{\varphi(a)}{\exists x.\varphi(x)}\ \exists\text{-intro}$$

Un altro esempio: la derivazione opposta.

$$\neg \forall x. \neg \varphi(x) \vdash \exists x.\varphi(x)$$

$\neg\exists x.\varphi(x)$ $\qquad$ $\varphi(a)$ $\qquad$ $\neg\forall x. \neg\varphi(x)$

$\exists$-intro

$\exists x.\varphi(x)$

$\neg$ -elim

$\perp$

Un altro esempio: la derivazione opposta.

$$\neg \forall x. \neg \varphi(x) \vdash \exists x.\varphi(x)$$

$\neg\exists x.\varphi(x)$ $\quad [\cancel{\varphi(a)}]^{(1)}$ $\quad \neg\forall x. \neg\varphi(x)$

$\exists$-intro

$\exists x.\varphi(x)$

$\neg$ -elim

$\bot$

$\neg$ -intro$^{(1)}$

$\neg \varphi(a)$

Un altro esempio: la derivazione opposta.

$\neg \forall x. \neg \varphi(x) \vdash \exists x.\varphi(x)$

$\neg\exists x.\varphi(x)$ $\quad$ $[\cancel{\varphi(a)}]^{(1)}$ $\quad$ $\neg\forall x. \neg\varphi(x)$

$\exists$-intro

$\exists x.\varphi(x)$

$\neg$ -elim

$\bot$

$\neg$ -intro$^{(1)}$

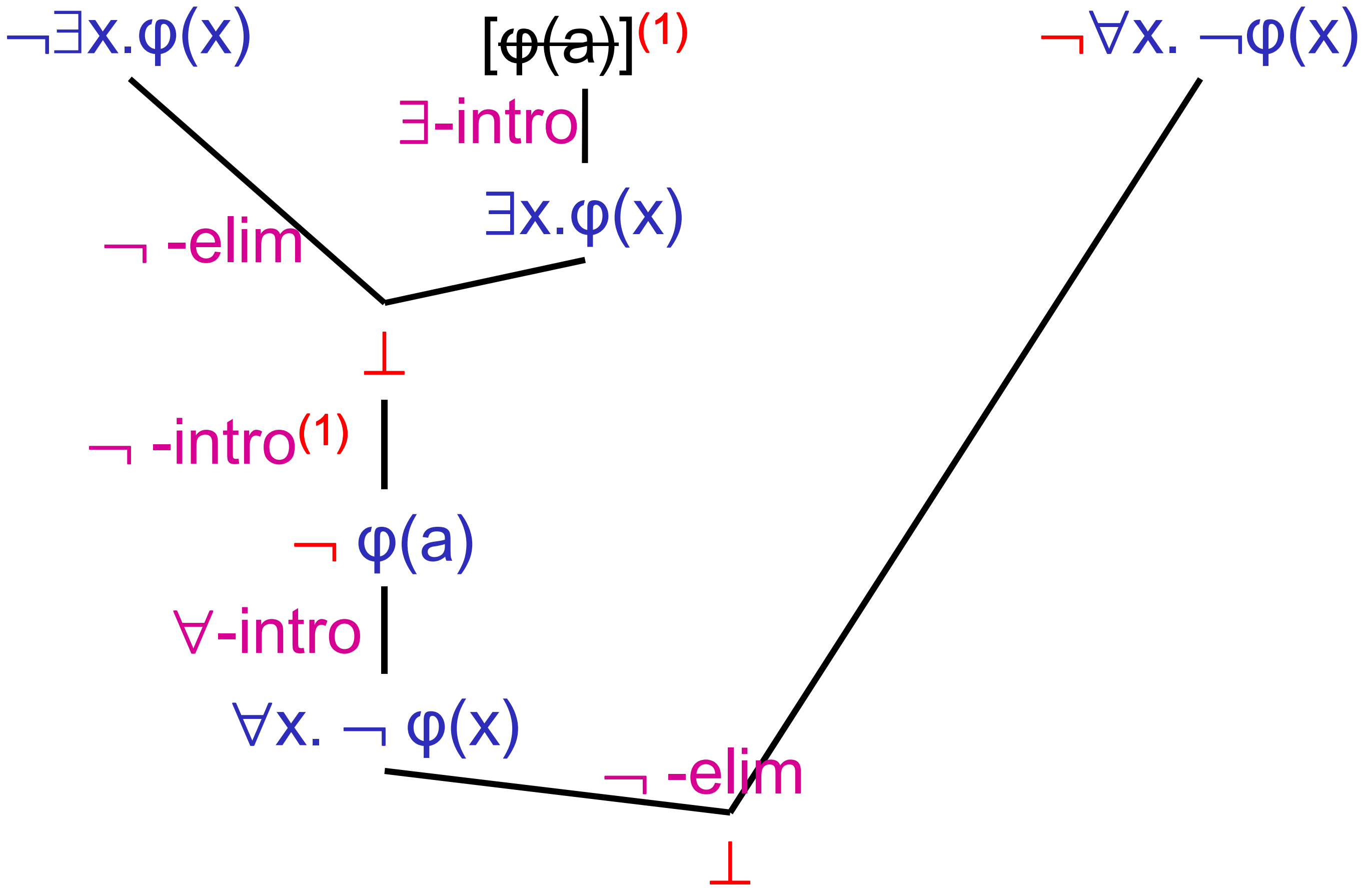
$\neg \varphi(a)$

$\forall$-intro

$\forall x. \neg \varphi(x)$

Un altro esempio: la derivazione opposta.

$$\neg \forall x. \neg \varphi(x) \vdash \exists x. \varphi(x)$$



Un altro esempio: la derivazione opposta.

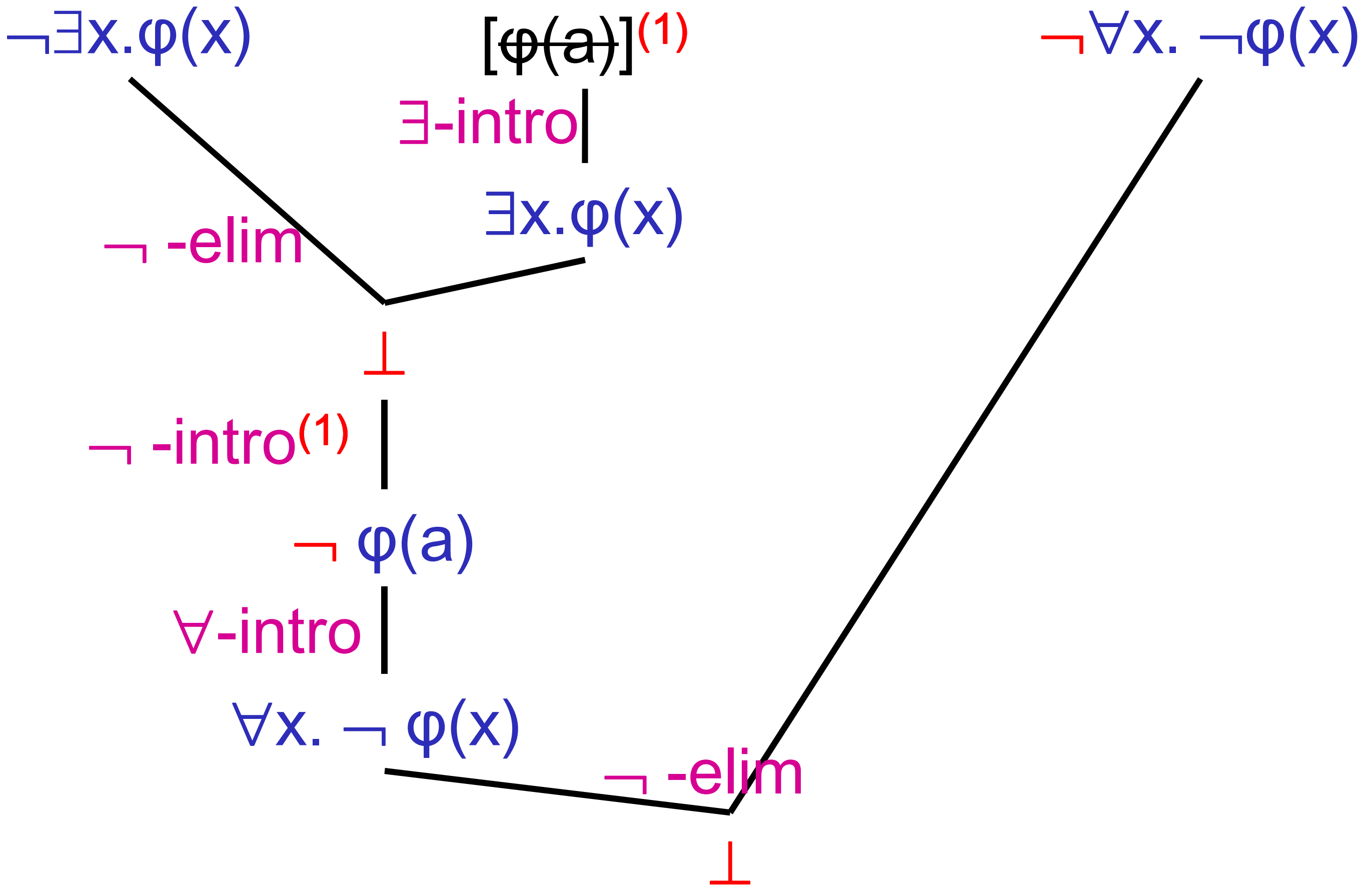
$$\neg \forall x. \neg \varphi(x) \vdash \exists x.\varphi(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\cancel{\neg \exists x.\varphi(x)}]^{(2)} \qquad \dfrac{[\cancel{\varphi(a)}]^{(1)}}{\exists x.\varphi(x)}\ \exists\text{-intro}}{\bot}\ \neg\text{-elim}}{\neg \varphi(a)}\ \neg\text{-intro}^{(1)}}{\forall x. \neg \varphi(x)}\ \forall\text{-intro} \qquad \neg\forall x. \neg\varphi(x)}{\bot}\ \neg\text{-elim}}{\exists x.\varphi(x)}\ \text{reg. assurdo classica}^{(2)}$$

È essenziale l'uso della regola dell'assurdo classica; quindi questa deduzione non vale nella logica intuizionista.

Derivazione intuizionisticamente valida.

$\neg \forall x.\ \neg \varphi(x) \vdash \ldots$



Derivazione intuizionisticamente valida.

$$\neg \forall x. \neg \varphi(x) \vdash \neg \neg \exists x.\varphi(x)$$

$[\cancel{\neg \exists x.\varphi(x)}]^{(2)}$ $\quad$ $[\cancel{\varphi(a)}]^{(1)}$ $\quad$ $\neg \forall x. \neg \varphi(x)$

$\exists$-intro

$\exists x.\varphi(x)$

$\neg$ -elim

$\perp$

$\neg$ -intro$^{(1)}$

$\neg \varphi(a)$

$\forall$-intro

$\forall x. \neg \varphi(x)$

$\neg$ -elim

$\perp$

$\neg$ -intro$^{(2)}$

$\neg \neg \exists x.\varphi(x)$

Nella logica intuizionista si può dedurre solo $\neg\neg\exists x.\varphi(x)$ che intuizionisticamente <u>non</u> equivale a $\exists x.\varphi(x)$

Dialogo fra un matematico classico e un intuizionista

(adattato da Edward Nelson, Understanding Intuitionism).

C: Ho appena dimostrato che esiste un numero x per cui vale quella complicata proprietà matematica $\varphi(x)$ di cui abbiamo discusso ieri; cioè ho dimostrato $\exists x.\varphi(x)$.

I: *Complimenti! Qual è questo numero?*

C: Non lo so. Ho assunto che un tale numero non esista, cioè ho assunto $\forall x. \neg\varphi(x)$, e ho derivato una contraddizione.

I: *Ah, ma allora hai dimostrato $\neg\forall x. \neg\varphi(x)$!*

C: Sì, è proprio quel che ho detto!

Per C le due affermazioni $\exists x.\varphi(x)$ e $\neg\forall x. \neg\varphi(x)$ sono due modi diversi di dire la stessa cosa; per I sono due affermazioni di significato profondamente diverso.

L'esempio dello studente "magico".

La derivazione dell'enunciato (classicamente) valido

$$\exists x.(P(x) \rightarrow \forall y.P(y))$$

dove P sta per il predicato "promosso" (ma il significato di P non ha alcuna rilevanza) si ottiene partendo dall'assioma del terzo escluso (in inglese LEM, Law of Excluded Middle), e facendo quindi una dimostrazione per casi:

- si dimostra il teorema a partire dall'assunzione che esista uno studente non promosso;
- si dimostra il teorema a partire dall'assunzione che non esistano studenti non promossi.

Nelle slides seguenti è riportata, a solo scopo illustrativo, la derivazione formale nel sistema Coq-ProofWeb.

L'esempio dello studente "magico".

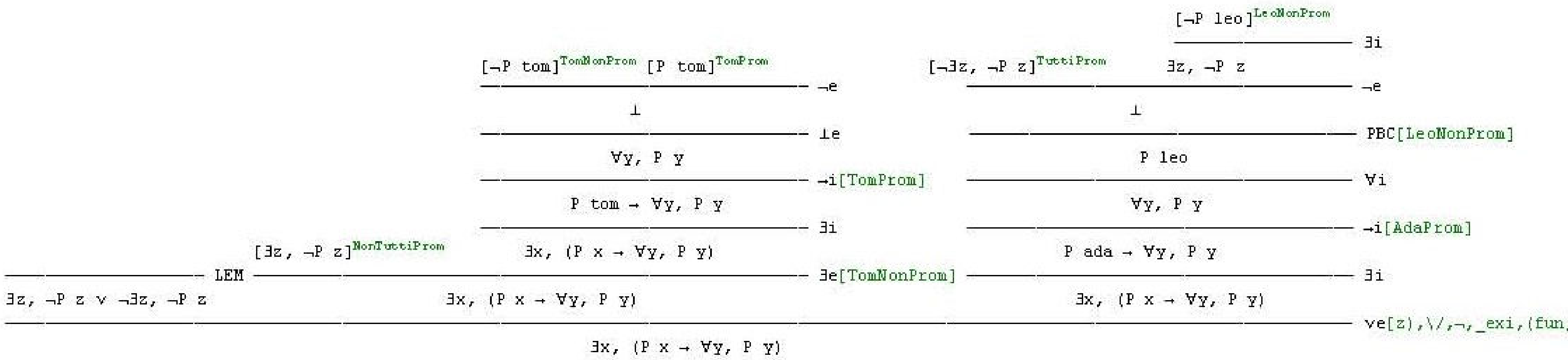
```
Theorem StudenteMagico: exi x, (P x -> all y, P y).

Proof.
dis_e (exi z, ~P z \/ ~ exi z, ~P z) NonTuttiProm TuttiProm.
LEM.
exi_e (exi z, ~P z) tom TomNonPromosso.
exact NonTuttiProm.
exi_i tom.
imp_i TomPromosso.
fls_e.
neg_e (P tom).
exact TomNonPromosso.
exact TomPromosso.
```

(continua nella slide seguente)

L'esempio dello studente "magico" (continua).

```
exi_i ada.
imp_i AdaPromossa.
all_i leo.
PBC LeoNonPromosso.
neg_e (exi z, ~P z).
exact TuttiProm.
exi_i leo.
exact LeoNonPromosso.
Qed.
```

L'albero di deduzione generato automaticamente.



Macchine e dimostrazioni.

Come si può intuire dalle slides precedenti, tali sistemi non sono facili da usare, e richiedono un tempo di apprendimento piuttosto lungo.

Tuttavia gli esperti li usano per produrre dimostrazioni di dimensioni gigantesche che non potrebbero in alcun modo essere fatte o controllate "a mano".

Ad esempio, i proof assistants vengono usati per generare dimostrazioni di correttezza di programmi (software) che devono gestire situazioni potenzialmente critiche (transazioni economiche, carte a microchip, ecc.; in futuro centrali nucleari, sistemi di controllo di aerei, ecc.).

Le dimostrazioni matematiche formali sono diventate prodotti commerciali, di elevato valore economico!

Teorie (del prim'ordine)

Una teoria è caratterizzata da:

- un linguaggio, detto il linguaggio della teoria, caratterizzato da un *vocabolario proprio* (costituito da costanti, s. funzionali e predicati);
- un insieme di assiomi e/o regole di inferenza proprie.

I teoremi della teoria sono allora le formule che si ottengono come radici di alberi di deduzione in cui le assunzioni non scaricate possono essere solo assiomi della teoria.

Le formule che si possono dedurre senza assunzioni non scaricate (cioè senza usare assiomi propri) e senza usare regole di inferenza proprie, sono i teoremi logici, o formule logicamente valide: esse valgono in ogni teoria.

Logica dell'uguaglianza.

L'uguaglianza è un predicato particolare, che può appartenere o no al linguaggio di una teoria. Se è presente, alle regole della deduzione naturale bisogna aggiungere:

- un assioma (riflessività): $\forall x.\ x = x$
- una regola (sostituvità):

$$\frac{A(t) \qquad t = s}{A(s)}$$

abuso di notazione;
bisognerebbe scrivere
$A[x := t]$ e $A[x := s]$

Gli assiomi/regole per l'uguaglianza possono essere dati in forme leggermente diverse dalle precedenti ma ad esse equivalenti.

Indecidibilità del calcolo dei predicati.

Nel 1936 Alonzo Church e indipendentemente Alan Turing dimostrarono che non può esistere un algoritmo in grado di stabilire, dato un qualunque enunciato nella logica predicativa, se esso sia logicamente valido oppure no, cioè se sia o no dimostrabile.

Pertanto la logica predicativa, a differenza di quella proposizionale, non è decidibile. In particolare, è semi-decidibile, cioè: c'è un (semi-)algoritmo che, se un enunciato è dimostrabile, permette di scoprirlo; ma se non lo è, il (semi-)algoritmo può non terminare mai.

Basta infatti ideare un programma di computer che generi via via tutte le possibili dimostrazioni, per ordine crescente di lunghezza della dimostrazione:

- se l'enunciato φ è dimostrabile, prima o poi il programma genera la dimostrazione di φ;
- se il programma genera la dimostrazione di $\neg\varphi$, allora per il principio di non-contraddizione si sa che φ non è dimostrabile;
- se tuttavia né φ né è $\neg\varphi$ dimostrabile, il programma continua a generare dimostrazioni di lunghezza crescente, senza mai arrestarsi.