

UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI TORINO  
ALMA UNIVERSITAS  
TAURINENSIS



## Calcoli: da Aristotele a Turing.

Elio Giovannetti  
Dipartimento di Informatica  
Università di Torino  
corso Svizzera 185 - Torino

Parte 1 - Dalla preistoria a Boole.



*Quest'opera è pubblicata sotto la licenza  
Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 3.0 Italia.  
Testo della licenza: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/legalcode>*

# Procedimento di calcolo

Che cosa voleva dire originariamente "calcolare"?

- (e) seguire un procedimento il quale, a partire da un insieme di dati numerici iniziali per mezzo dei quali si esprime un problema, permette di ricavare un numero o un insieme di numeri che costituiscono la soluzione del problema.

Che cos'è un procedimento di calcolo?

- è un procedimento definito da regole precise e non ambigue, che si devono seguire "meccanicamente", cioè senza alcuna inventiva, senza pensare.

## Esempi di procedimenti di calcolo

I procedimenti imparati nella scuola elementare per eseguire "in colonna" le quattro operazioni.

Problema. Ho 456 biscotti che voglio distribuire in parti uguali fra 7 bimbi. Quanti biscotti devo dare a ciascuno?

$$\begin{array}{r} 456 \\ \underline{42} \\ 36 \\ \underline{35} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} :7 \\ 65 \end{array}$$

Se voglio dare solo biscotti interi la soluzione è:

65 biscotti ciascuno, ne avanza uno che mi mangio io.

Qualcuno di voi sa perché la divisione si fa(ceva) così?

Se lo sa, ci pensa(va) quando fa(ceva) una divisione?

## La moltiplicazione: noi e gli antichi Romani.

Come calcoliamo, nella scuola elementare,  $325 \times 47$ ?

$$\begin{array}{r} 325 \\ \underline{47} \\ 2275 \\ \underline{1300} \\ 15275 \end{array}$$

Abbiamo moltiplicato ogni cifra di un fattore per tutte le cifre dell'altro: quindi in tutto abbiamo fatto

$$3 \times 2 = 6 \text{ moltiplicazioni elementari}$$

(più i riporti e le addizioni)

Come facevano i Romani a calcolare  $CCCXXV$  per  $XLVII$ ?  
Il nostro procedimento non funziona!

## La moltiplicazione con i numeri romani?

Possiamo cercare di adattare il nostro metodo, riscrivendo prima XLVII come XXXXVII, ma se si analizza il procedimento si vede che sono necessarie 35 moltiplicazioni elementari, contro le nostre 6!

Considerazioni analoghe valgono per gli antichi Greci.

Eppure i Greci erano dediti al commercio, i Romani erano gente pratica, e né presso gli uni né presso gli altri ci risulta che esistesse una casta di scribi o di sacerdoti dediti ai calcoli.

Dunque come facevano?

**Usavano l'abaco!**

(latino *abacus*, greco ἄβαξ o ἄβάκιον)

L'abaco è uno strumento fatto di scanalature e sassolini, dove il valore rappresentato da un sassolino dipende dalla sua posizione, cioè dalla scanalatura in cui si trova.

# Calcoli.

Qual è l'origine della parola *calcolo*?

- latino *calculus*, dim. di *calx*: sassolino, pietruzza

Abbiamo detto che

- un procedimento di calcolo deve essere costituito da regole precise e non ambigue, che si devono seguire senza alcuna inventiva, senza pensare, "meccanicamente".

Proprio perché meccanico, un procedimento di questo genere si presta ad essere eseguito con l'ausilio di strumenti inventati allo scopo, cioè con l'ausilio di una macchina (*μηχανή*).

L'abaco è una macchina!

Dunque il calcolo a macchina prima del calcolo scritto!

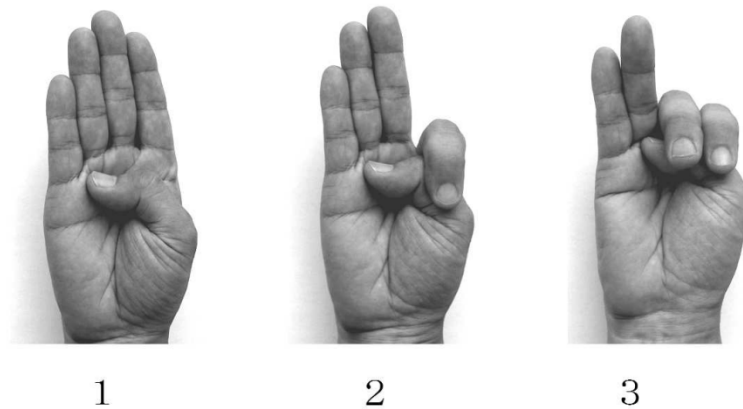
In principio era la macchina?

# Calcolare e contare.

In realtà, il calcolare è ovviamente legato al contare (fare conti è ancora oggi sinonimo di fare calcoli), e molto probabilmente il primo mezzo per contare/calcolare sono state le dita delle mani (e dei piedi).

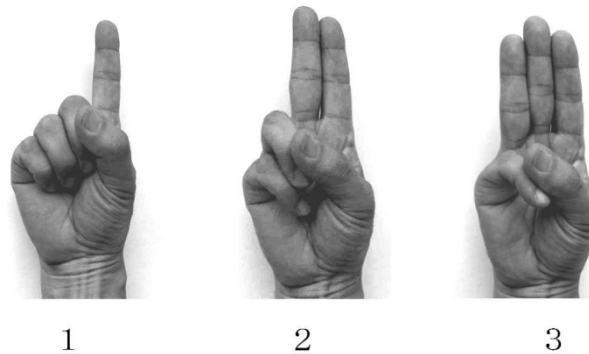
Tanti modi diversi per contare sulle dita:

- in Occidente si parte dal pugno chiuso e si estende un dito per volta cominciando dal pollice;
- in Giappone si contava partendo dalla mano aperta e piegando un dito per volta cominciando dal pollice:

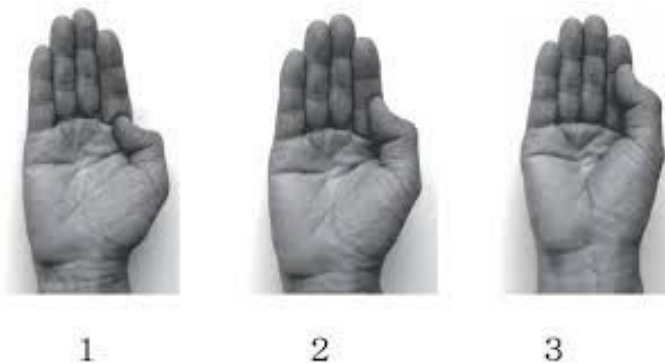


# Contare sulle dita.

- In Giappone adesso si conta estendendo un dito per volta iniziando dall'indice.



In India si conta ponendo il pollice sulle falangi delle quattro dita opposte, e così si conta fino a 12 su una mano sola.





# Abaco e notazione posizionale

- Greci e Romani avevano dunque la notazione posizionale nello hardware (l'abaco) ma, a differenza degli Indiani, non riuscirono a tradurla nel software (la scrittura)!
- Come è ben noto, non riuscirono a inventare lo zero!
- Per Greci e Romani, se da tre mele si toglievano tre mele, non si ottenevano zero mele: semplicemente, non si aveva più niente!
- Gli Indiani ci saranno arrivati grazie al pensiero orientale del vuoto come essere ... oppure per esigenze pratiche?

# Algoritmi e strutture dati.

- La storia della rappresentazione dei numeri naturali è l'esempio primigenio di un fatto centrale: **l'efficienza o addirittura la fattibilità di un procedimento di calcolo (algoritmo) è spesso strettamente legata al modo in cui sono rappresentati i dati su cui si opera.**

rappresentazione posizionale



- dimensione logaritmica rispetto al valore.
- diventa facile scrivere numeri che per il mondo antico erano “troppo grandi” e quasi impossibili da nominare
- **algoritmi semplici per le 4 operazioni (scuola elementare).**

Non per nulla, quasi tutti i libri di testo e corsi universitari di algoritmi si intitolano in realtà **"Algoritmi e strutture dati"**

## Intermezzo: che cosa sono i numeri naturali?

I numeri naturali non coincidono con le loro rappresentazioni!  
Sono entità astratte!

(Anche se in realtà oggi, come vedremo più avanti, si potrebbero fare delle osservazioni critiche in proposito).

Per rendercene meglio conto, trasferiamoci nel modo dei polipi, facendo però prima un brevissimo scalo in Giappone.

# L'aritmetica dei giapponesi

1	ici				
2	ni	20	ni-giu	21	ni-giu ici ....
3	san	30	san-giu		
4	yon	40	yon-giu		
5	go	...			

...

9 kyu I nomi dei numeri in cinese e in giapponese

10 giu sono molto regolari;

11 giu-ici come vedremo, anche nella lingua dei polipi

12 giu-ni è così!

13 giu-yon

...

19 giu-kyu

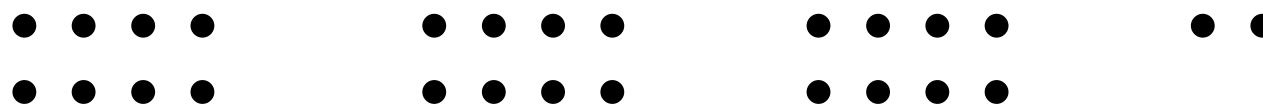
## L'aritmetica dei polipi

I polipi non hanno dieci dita, bensì otto tentacoli; quindi raggruppano gli oggetti non per dieci, ma per otto (ricorda: in inglese polipo si dice octopus, dal greco = 8 piedi)

Allora il numero che noi chiamiamo ventisei



loro lo pensano all'incirca così:



cioè 3 mucchietti da otto + 2,

quindi lo scrivono 32,

e lo pronunciano treottidue (o forse trottidue ...)

## L'aritmetica dei polipi

uno	1	ottosette	17	...	
due	2	duotti	20	settottisette	77
tre	3	duottiuno	21	tento	100
quattro	4	duottidue	22	tille	1000
cinque	5	duottitre	23	...	
sei	6	duottiquattro	24		
sette	7	...			
otto	10	treotti	30		
ottouno	11	...			
ottodue	12	quattrotti	40		
ottotre	13	cinquotti	50		
...		ecc.			

## Traduzione dall'ottale al decimale

Come chiamiamo noi il numero  
che i polipi scrivono 42 e chiamano quattrottidue?

Semplice:

$$4 \times 8 + 2 = 34$$

Nota Bene:

I piccoli dei polipi studiano a memoria delle tabelline con nomi  
e simboli diversi dai nostri.

Ad esempio la tabellina del 3 sarà:

$$3 \times 1 = 3; \quad 3 \times 2 = 6;$$

$$3 \times 3 = 11 \quad \text{cioè} \quad \text{tre per tre} = \text{ottuno};$$

$$3 \times 4 = 14 \quad \text{cioè} \quad \text{tre per quattro} = \text{ottoquattro}$$

...

$$3 \times 6 = 22 \quad \text{cioè} \quad \text{tre per sei} = \text{duotti-due}$$

## Addizione e sottrazione in ottale

ottale	decimale	ottale	decimale
32	26	23	19
<u>+ 43</u>	<u>+ 35</u>	<u>+ 45</u>	<u>+ 37</u>
75	61	70	56

ottale	decimale	ottale	decimale
23	19	43	35
<u>+ 47</u>	<u>+ 39</u>	<u>- 25</u>	<u>- 21</u>
72	58	16	14

Si legge, ad esempio: duottitre + quattrottisette

In colonna:  $3 + 7 = \text{ottodue}$ , scrivo 2 e riporto una “ottina”, ecc.



# Calcolare e ragionare

## L'agorà greca:

- piazza del mercato - *forse si usava l'abaco?*
- luogo delle discussioni e deliberazioni politiche
  - *si sviluppano le arti della retorica e dell'argomentazione (come riuscire a convincere gli altri).*

Dai modi di argomentare considerati corretti si estrassero delle **forme** comuni fra ragionamenti su contenuti diversi (G. Longo):  
Le due argomentazioni:

- Tutti i Greci sono uomini, tutti gli uomini sono mortali, quindi tutti i Greci sono mortali.
- Tutte le viti sono latifoglie, tutte le latifoglie sono a foglie caduche, quindi tutte le viti sono a foglie caduche.

hanno la stessa forma: sono corrette in virtù della loro forma.

## Il ragionamento è una forma di calcolo?

- Aristotele fu il primo (in Occidente) che si dedicò ad uno studio esplicito delle forme corrette di ragionamento.
- Anche il ragionamento corretto sembra caratterizzato dalla conformità a regole meccaniche, dunque meccanizzabile.
- È un caso che il termine

*λόγος* (latino **verbum, ratio**)

volesse dire sia *parola, ragione*, che *rappporto fra numeri*?

In inglese il rapporto fra due quantità si dice ancora oggi *ratio*.

- Nel corso della storia è stata sempre presente la percezione di una analogia fra ragionamento e calcolo aritmetico, ed è quindi naturale che si sia sviluppata l'idea di una possibile riduzione del ragionamento a una qualche specie di calcolo ben definito: da cui, poi, ottenere una meccanizzazione del ragionamento.



Thomas Hobbes, 1588 -1679

# Il ragionamento è una forma di calcolo?

**Hobbes**, a metà del '600:

"ragionare non è nient'altro che fare dei conti",

perché

"come gli studiosi di aritmetica insegnano ad addizionare e sottrarre coi numeri, e i geometri insegnano la stessa cosa con le linee, le figure, gli angoli [...], così i logici insegnano la stessa cosa con le conseguenze delle parole, sommando insieme due nomi per costruire una proposizione, e due proposizioni per costruire un sillogismo, e molti sillogismi per costruire una dimostrazione; ..."



Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646 -1716

# Leibniz

Matematico, filosofo, fisico, ingegnere, politico, sinologo ... , genio universale, anche noto per il suo ottimismo ("questo è il migliore dei mondi possibili"), su cui si esercitò il sarcasmo di Voltaire (nel *Candide*).

Immaginò di poter riuscire a definire un linguaggio simbolico universale, la **characteristica universalis**, con associato un **calculus ratiocinator**, cioè un insieme di regole di un calcolo logico, attraverso cui si potessero esprimere tutte le possibili argomentazioni corrette.

Anzi, Leibniz probabilmente pensava che si potesse costruire a tale scopo una macchina logica, analoga alla macchina per effettuare le moltiplicazioni che lui stesso aveva inventato.

Essendo appunto un visionario ottimista, immaginò che tutte le dispute si sarebbero potute risolvere col calcolo logico!

# Calculemus!

**Leibniz**, 1677:

"Il est manifeste, que si l'on pouvoit trouver des caractères ou signes propres à exprimer toutes nos pensées aussi nettement et exactement que l'arithmétique exprime les nombres ou que l'analyse geométrique exprime les lignes, on pourroit faire en toutes les matières autant qu'elles sont sujettes au raisonnement tout ce qu'on peut faire en Arithmétique et en Géométrie."

Ancora **Leibniz**:

"Quo facto, quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abacos, et sibi mutuo (accito si placet amico) dicere: **calculemus!**"

# Il ragionamento è una forma di calcolo? Le leggi matematiche del pensiero.

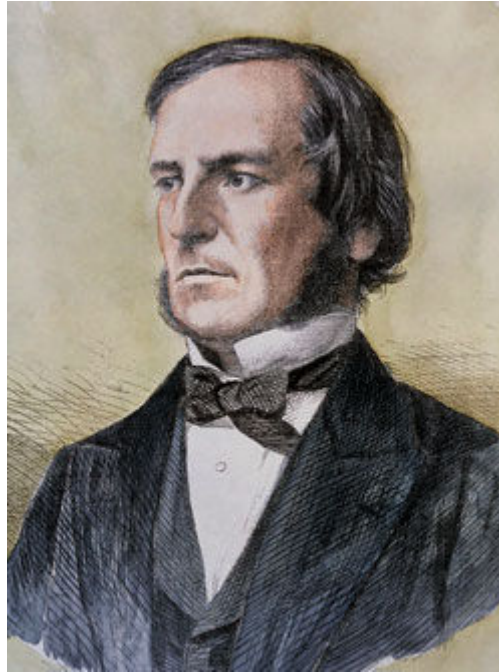
Dal Seicento all'Ottocento:

**George Boole**, **The Laws of Thought** (Le leggi del pensiero),  
Cork (Inghilterra), 1854.

È considerato il fondatore della **logica proposizionale**: il calcolo logico inventato da Boole può essere visto come un calcolo analogo a quelli aritmetici, fondato su una struttura matematica ben precisa che viene detta, in suo onore, **algebra di Boole**.

Ancora oggi, in tutti i linguaggi di programmazione ("tipati") esiste un tipo di dato che si chiama **boolean**, che è costituito da due elementi: **true** e **false**.





George Boole, 1815 -1864

## Logica booleana o proposizionale.

- Fin dai tempi di Aristotele, la logica è la scienza che cerca di stabilire quali siano le forme corrette di ragionamento, cioè come da certe assunzioni o premesse si possano ricavare delle conclusioni, in modo che **se le premesse sono vere, le conclusioni siano sicuramente vere.**
- La logica proposizionale studia le forme di ragionamento che non dipendono dai componenti interni delle proposizioni elementari, ma solo dal significato di particelle come la congiunzione "e", la disgiunzione "o", ecc., quando esse sono usate per connettere proposizioni elementari.
- La logica proposizionale quindi non analizza una proposizione elementare, ad es. "la neve è bianca", o "tutti i triangoli equilateri sono equiangoli", in termini di soggetto, predicato, complementi, ecc. ma la considera come un'espressione atomica (cioè indivisibile) che può essere vera o falsa.