Olimpiadi di Informatica 2010
Giornate preparatorie

Dipartimento di Informatica
Università di Torino

marzo 2010

4 – Algoritmi su array con soluzione lineare non immediata.
(versione 29/03/10)

Il problema "numeri antipatici": versione semplificata.

E' ben nota l'antipatia umorale della Regina di Cuori per certi numeri: per esempio, odia il numero 13; non solo, anche il 17 non è molto amato da Sua Maestà. Ahimè, questi non sono gli unici casi poiché ci sono diversi numeri M che non sono tollerati dalla Regina e a farne le spese sono i poveri giardinieri. Il problema è che, ogni mattina, la Regina si alza e indica ai giardinieri qual è il numero M che le è antipatico quel giorno.

Lungo il dritto viale che porta alla regale dimora, c'è un filare di N piante di rose. Purtroppo, la Regina conta le rose mentre passeggia nel viale e non sopporta che una sequenza di una o più piante consecutive contenga un totale di M rose: ha fatto tagliare diverse teste per questioni meno gravi. I giardinieri sono terrorizzati dal fatto che lo Stregatto ci abbia messo lo zampino, alterando il numero di rose in modo da far apparire M rose. Aiutali a individuare il numero S di sequenze le cui piante totalizzano M rose nel filare.

Assumiamo che <u>non ci siano piante con 0 rose</u>, (e che il numero antipatico M sia anch'esso un intero > 0).

Il problema astratto

Data una sequenza A di interi positivi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, e un intero positivo M, trovare il numero di sequenze di elementi consecutivi di A (non necessariamente tutte disgiunte) aventi per somma M, cioè trovare in quanti modi si può ottenere la somma M sommando elementi consecutivi di A.

Esempio:

M = 9 sequenza: $\underline{2\ 3\ 4}\ 3\ 1\ 1\ 1\ 5\ 4\ 2$

$2\ 3\ \underline{4\ 3\ 1\ 1}\ 1\ 5\ 4\ 2$

$2\ 3\ 4\ 3\ 1\ 1\ 1\ \underline{5\ 4}\ 2$

Risultato S = 3

Il problema con gli zeri.

- Vi possono essere piante con 0 rose.
- Il numero antipatico M può essere 0.

Esempi:

M = 7 sequenza: $\underline{0\ 0\ 2\ 3\ 0\ 2}\ 0\ 0\ 0\ 6$

Risultato S = 12 $0\ \underline{0\ 2\ 3\ 0\ 2}\ 0\ 0\ 0\ 6$

$0\ 0\ \underline{2\ 3\ 0\ 2}\ 0\ 0\ 0\ 6$

$\underline{0\ 0\ 2\ 3\ 0\ 2\ 0}\ 0\ 0\ 6$

$0\ \underline{0\ 2\ 3\ 0\ 2\ 0}\ 0\ 0\ 6$

$0\ 0\ \underline{2\ 3\ 0\ 2\ 0}\ 0\ 0\ 6$

$\underline{0\ 0\ 2\ 3\ 0\ 2\ 0\ 0}\ 0\ 6$

ecc.

Il problema con gli zeri.

- Il caso M = 0 conviene sia trattato separatamente, osservando che ogni sottosequenza di m zeri consecutivi dà origine a m(m+1)/2 sequenze distinte di somma 0. Esempio:

  $\underline{0}\ 0\ 0\ 0$ $\quad$ $0\ \underline{0}\ 0\ 0$ $\quad$ $0\ 0\ \underline{0}\ 0$ $\quad$ $0\ 0\ 0\ \underline{0}$

  $\underline{0\ 0}\ 0\ 0$ $\quad$ $0\ \underline{0\ 0}\ 0$ $\quad$ $0\ 0\ \underline{0\ 0}$

  ecc.

  4 sequenze di lunghezza 1

+3 sequenze di lunghezza 2

+2 sequenze di lunghezza 3

+1 sequenza di lunghezza 4

In generale, una sequenza di n zeri consecutivi darà origine a n + (n-1) + (n-2) + … + 2 + 1 = n(n+1)/2 sequenze di somma 0.

Il problema con gli zeri.

- Nel caso M ≠ 0, per ottenere un algoritmo lineare bisogna, mentre si scandisce l'array, contare il numero di zeri che precedono ciascuna sottosequenza (e, volendo, anche il numero di zeri che seguono).