Università di Torino – Facoltà di Scienze MFN
Corso di Studi in Informatica

Programmazione I - corso B
a.a. 2009-10

prof. Viviana Bono

Blocco 2 – Numeri, sistemi di numerazione, valori, rappresentazioni

Sistemi di numerazione

I numeri sono entità astratte, non sono simboli!

Che cosa è “l’albero”? Nessuno ha mai visto “l’albero”, e nemmeno “il ciliegio”: vediamo un albero qui e un albero là, questi ciliegi qui e quei ciliegi là ...

“l’albero” è un concetto astratto, che indica tutto ciò che (secondo noi) hanno in comune tutte quelle cose che chiamiamo “alberi”.

Che cosa è “il cinque”? Nessuno ha mai visto “il cinque”: noi vediamo qui un cinque di fiori, là un cinque di picche, nel giardino un cinque alberi, lassù un cinque stelle,...

… ma “il cinque” è un concetto astratto!

Numeri e rappresentazioni dei numeri.

Ecco un cinque: • • • • •

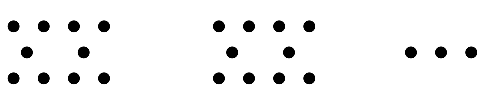
Nella preistoria si indicava così anche il concetto astratto.

Oggi il concetto astratto *cinque* è indicato da quasi tutti gli esseri umani con il simbolo 5, benché pronunciato in modi molto diversi.

Che cos’è ventitre?

• •

Già i Romani lo pensavano all’incirca così:

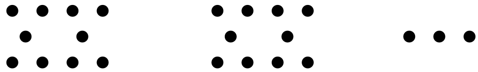


e lo scrivevano:

X X III

Base dieci e notazione posizionale

Anche gl'indiani lo pensavano all'incirca nello stesso modo:



ma lo scrivevano 23:

invece di scrivere due simboli del dieci e il simbolo del tre, scrivevano il simbolo del due a sinistra del simbolo del tre.

La posizione dei simboli diventa importante!

Numeri e rappresentazioni dei numeri

58 = 5 "mucchietti" da dieci + otto;
in italiano: cinquantotto, cioè 5dieci e 8

Perché lo *zero*?

5  = cinque rose o cinque gruppi di dieci rose?

cinque rose naturalmente!

Numeri e rappresentazioni dei numeri

58 = 5 mucchietti da dieci più otto;
in italiano: cinquantotto, cioè 5dieci e 8

Perché lo zero?

5  = cinque rose o cinque gruppi di dieci rose?
cinque rose, naturalmente!

50  = cinque gruppi di dieci rose
\+ nessuna (0) rosa “fuori dai gruppi”

508  = cinque mazzi di cento rose,
\+ nessun mazzolino da 10 rose
\+ otto rose

Se avessimo 8 dita (+ o - come i polipi..)

I polipi non hanno dieci dita, bensì otto tentacoli; quindi raggruppano gli oggetti non per dieci, ma per otto

Allora il numero che noi chiamiamo ventisei

● ●

loro lo pensano all’incirca così:

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

cioè 3 mucchietti da otto + 2,
quindi lo scrivono 32
(e lo pronunciano…? Treottidue?)

L'aritmetica ottale

uno	1	ottosette	17	...	
due	2	duotti	20	settottisette	77
tre	3	duottiuno	21	tento	100
quattro	4	duottidue	22	tille	1000
cinque	5	duottitre	23	...	
sei	6	duottiquattro	24		
sette	7	...			
otto	10	treotti	30		
ottouno	11	...			
ottodue	12	quattrotti	40		
ottotre	13	cinquotti	50		
...		ecc.			

Traduzione dall'ottale al decimale

Come chiamiamo noi il numero
che i "polipi" scriverebbero 42?
La notazione è comunque posizionale, per cui:

$$4 \times 8 + 2 = 34$$

<u>NB</u>
La tabellina del 3 sarà:

$3 \times 1 = 3$; $3 \times 2 = 6$;
$3 \times 3 = 11$ cioè tre per tre = ottuno;
$3 \times 4 = 14$ cioè tre per quattro = ottoquattro
...
$3 \times 6 = 22$ cioè tre per sei = duotti-due

Traduzione dal decimale all'ottale

Come chiamano i “polipi”
il numero che noi chiamiamo 37?

37:8 = 4 col resto di 5

lo chiamano 45 (quattrotticinque)
cioè   4 × otto + 5

Rappresentazione decimale

dieci cifre designano i primi dieci numeri naturali da zero a nove;
i numeri successivi sono rappresentati dalla scrittura:

$c_k c_{k-1} \dots c_2\, c_1\, c_0$ il cui significato è:

$$c_k \times 10^k + c_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots + c_2 \times 10^2 + c_1 \times 10^1 + c_0 \times 10^0$$

Rappresentazione ottale

otto cifre rappresentano i primi otto numeri naturali
da zero a sette; i numeri successivi sono rappresentati da:

$c_k c_{k-1} \dots c_2\, c_1\, c_0$

il cui significato è:

$$c_k \times 8^k + c_{k-1} \times 8^{k-1} + \dots + c_2 \times 8^2 + c_1 \times 8^1 + c_0 \times 8^0$$

NB Nel descrivere il significato del decimale e dell’ottale scriviamo in decimale!

Addizione e sottrazione in ottale

ottale	decimale	ottale	decimale
32	26	23	19
+ 43	+ 35	+ 45	+ 37
75	61	70	56

ottale	decimale	ottale	decimale
23	19	43	35
+ 47	+ 39	- 25	- 21
72	58	16	14

Frazioni e virgola decimale

Quanto fa 821 : 375? Fa $\frac{821}{375}$

Le frazioni sono <u>un nuovo tipo di numero</u> rispetto ai naturali!
E che cosa è un "numero con la virgola (decimale)"?
È un modo convenzionale di scrivere una somma di frazioni aventi come denominatori potenze successive di dieci.

$$0{,}3072 = \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{2}{10000}$$

$$c_k c_{k-1} \ldots c_2\, c_1\, c_0\, ,\, d_1 d_2 \ldots d_h$$

significato:

$$c_k \times 10^k + c_{k-1} \times 10^{k-1} + \ldots + c_2 \times 10^2 + c_1 \times 10^1 + c_0 \times 10^0$$
$$+\, d_1 \times 10^{-1} + d_2 \times 10^{-2} + \ldots + d_h \times 10^{-h}$$

Terminologia

frazione decimale =

frazione avente per denominatore una potenza di dieci

2/10, 23/100, 7/10000, 5 (= 5/1) ecc. sono frazioni decimali

100/7 non è una frazione decimale

Frazioni e virgola decimale

Che cosa vuol dire che 7/4 = 1,75 ?

Semplicemente che mangiare 7/4 di torta è esattamente la stessa cosa che mangiare una torta e 7/10 di torta e infine ancora 5/100 di torta:

cioè la frazione 7/4 è la stessa cosa che 1 + 7/10 + 5/100

Scrivere le frazioni in questo modo ha il vantaggio che ad esempio si vede subito quanti interi ci sono nella frazione; inoltre, date due frazioni, possiamo immediatamente vedere quale delle due è la più grande.

Ad esempio, è meglio avere 3567 torte per 826 persone, oppure 3467 torte per 726 persone? Cioè quale delle due frazioni 3567/826 e 3467/726 è più grande?

3567/826 = 4 + 3/10 + 1/100 + ...

3467/726 = 4 + 7/10 + 7/100 + ...

È meglio (di poco ...) la seconda.

Frazioni non esprimibili per mezzo di frazioni decimali

Non tutte le frazioni sono somme <u>finite</u> di frazioni decimali:

$\frac{2}{3}$ non è esprimibile come somma finita di frazioni decimali, ma solo come somma di infinite frazioni decimali:

6/10 + 6/100 + 6/1000 + 6/10000 + ...

che scriviamo, nella notazione con la virgola:

0.66666 ....

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857\ \ldots$$

le frazioni che non sono "numeri decimali limitati"

sono "numeri periodici" (e viceversa ogni numero periodico è una frazione).

Rappresentazione in base 2

0	0	
1	1	
2	10	cioè una coppia + 0 unità
3	11	cioè una coppia + 1
4	100	cioè una coppia di coppie + 0 coppie + 0 unità
5	101	cioè una coppia di coppie + 0 coppie + 1 unità
6	110	...
7	111	...
8	1000	
9	1001	
10	1010	
11	1011	
12	1100	eccetera

Rappresentazione in base 2 e virgola binaria

$$c_k c_{k-1} \ldots c_2\, c_1\, c_0\ ,\ d_1 d_2 \ldots d_h$$

significato:

$$c_k \times 2^k + c_{k-1} \times 2^{k-1} + \ldots + c_2 \times 2^2 + c_1 \times 2^1 + c_0 \times 2^0$$
$$+\ d_1 \times 2^{-1} + d_2 \times 2^{-2} + \ldots + d_h \times 2^{-h}$$

Il numero decimale con virgola 0,2 (cioè la frazione 1/5) come si rappresenta in base 2?

0,001100110011 ...

Poiché ovviamente un numero può essere rappresentato nel calcolatore soltanto con una quantità finita di cifre binarie (bit) il numero decimale 0,2 può essere rappresentato nel calcolatore *non esattamente*, ma solo in modo approssimato.

Rappresentazione in base 16: esadecimale

Se gli uomini avessero 16 dita, conterebbero in base sedici, e avrebbero inventato altri 6 segni (cioè cifre) per indicare i numeri da 10 a 15, ad es.:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ☺ ‽ ♑ ♌ ॐ ⌘

10 11 ... 14 15

Allora ad es. il decimale 46,

cioè due “sedicetti” + quattordici unità (46 = 2×16 + 14),

lo scriveremmo 2ॐ

Poiché la notazione esadecimale è usata solo nell’informatica, noi invece di inventarci nuovi simboli possiamo usare semplicemente le prime 6 lettere dell’alfabeto senza con ciò rischiare confusioni.

decimale	esadecimale	decimale	esadec.	decimale	esadec.
...	...				
10	A	26	1A	255	FF
11	B	27	1B	256	100
12	C	...	...		
13	D	31	1F		
14	E	32	20		
15	F	33	21		
16	10	...	...		
17	11	48	30		
18	12	...	...		
19	13				
20	14				
21	15				
...	...				

Notazioni esadecimale e binaria

La scrittura dei numeri in notazione binaria non è adatta all'uso umano (occupa troppo spazio, facilità di commettere errori di scrittura o lettura, ecc.).

Poiché $16 = 2^4$, ogni cifra esadecimale corriponde a 4 cifre binarie; d'altra parte nei dispositivi elettronici le cifre binarie sono raggruppate in gruppi minimi di 8 bit, detti byte.

Un byte è quindi descrivibile con esattamente due cifre esadecimali.

Possiamo allora usare la <u>notazione esadecimale</u> come se fosse una <u>notazione binaria compatta</u>.

La notazione binaria vera e propria non viene QUASI MAI usata: al suo posto si usa la notazione esadecimale.

Corrispondenza fra cifre esadec. e sequenze di 4 bit

decimale	esadecimale	binario (4 bits)
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Esempio di notazione esadecimale

decimale	binario	esadecimale
181	10110101	B5

$181 = 1\times2^7 + 0\times2^6 + 1\times2^5 + 1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2 + 1$
$\quad = 128 + 32 + 16 + 4 + 1$

$181 = 11 \times 16 + 5$ = esadecimale B5

Osserviamo: binario 1011 = decimale 11 = esadecimale B
binario 0101 = decimale 5 = esadecimale 5

1011 0101 = B5

Enti astratti e rappresentazioni, valori numerici e non numerici

Astratto e concreto (E. Giovannetti)

Non si confondano i valori, che sono degli enti astratti, con le loro rappresentazioni sia esterne (sullo schermo o sulla tastiera) che interne (nella memoria del calcolatore), sia concrete che astratte: il numero 15 non è né la coppia di cifre 1 e 5, né la sua rappresentazione binaria per mezzo di dispositivi elettronici all'interno del calcolatore. Analogamente, il carattere "a" minuscolo, che in Java viene indicato come 'a', non coincide né con il segno d'inchiostro impresso dalla stampante su questo foglio, né con il numero 97 con cui esso è rappresentato all'interno del calcolatore in base al codice ASCII o UNICODE.

||||||||||||||| 15 17_8 1111_2 F XV

sono rappresentazioni diverse dello STESSO NUMERO. In un certo senso, la prima rappresentazione è la più fedele, cioè quella più vicina all' "essenza" del numero, qualunque cosa ciò voglia dire.

La rappresentazione di un ente astratto può essere realizzata per mezzo di enti astratti di un altro tipo: ad esempio il numero 3, che ovviamente non è un oggetto materiale, può essere rappresentato dal carattere ‘3’, che è un ente astratto il quale può essere a sua volta rappresentato da un numero, ad esempio nella codifica UNICODE o ASCII dal numero 51, che a sua volta è rappresentato dalla sequenza di cifre binarie 00110011, la quale a sua volta è rappresentata dallo stato di certi microscopici circuiti elettronici all'interno di un frammento di silicio... Ma il numero 3 non deve essere confuso con il carattere ‘3’!

NB come vedremo, nel linguaggio Java i caratteri, per ragioni di comodità di programmazione, *sono* dei numeri: sono tuttavia dei particolari “tipi” di numero, che quando vengono mandati ad esempio sullo schermo vengono visualizzati come caratteri (ad esempio: il numero 97 verrà visualizzato come ‘a’, il numero 65 come ‘A’, il numero 51 verrà visualizzato come il carattere 3, ecc.)

A questo punto ci si potrà domandare: se nel calcolatore tutto è rappresentato per mezzo di numeri, come fa la macchina a distinguere ad esempio fra il numero 51 inteso per se stesso e il numero 51 inteso come rappresentazione del carattere 3? entrambi sono rappresentati dalla sequenza binaria 00110011!

La risposta è che

sono diverse le operazioni che vengono compiute su di essi!

Cioè: nei linguaggi ad alto livello come Java il numero 51 e il carattere ‘3’ vengono espressi in due modi diversi; ma, proprio per questo, lo stesso comando di visualizzazione viene tradotto nel linguaggio della macchina in due comandi diversi: nel primo caso il comando visualizza (in notazione decimale) proprio 51, nel secondo caso consulta la tabella UNICODE e visualizza 3.

Similmente, la sequenza di caratteri o *stringa* “62” è una cosa diversa dal numero 62; come vedremo, “62” + “51” è diverso da 62 + 51 !