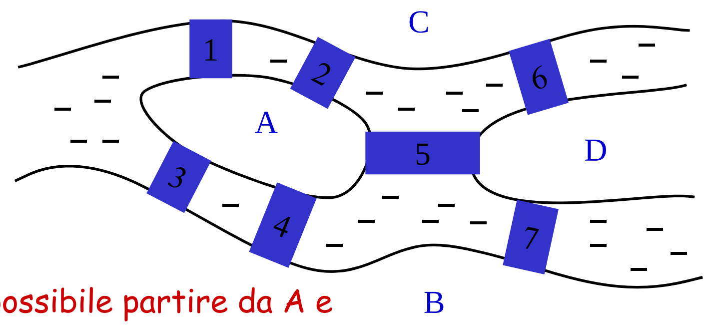
Olimpiadi di Informatica 2011
Giornate preparatorie

Dipartimento di Informatica
Università di Torino

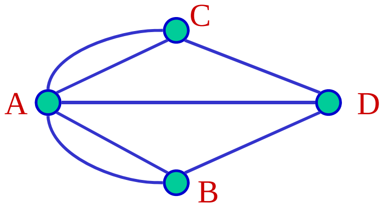
marzo 2011

9 – Grafi e algoritmi sui grafi: introduzione.
(versione 04/04/11)

Eulero: il problema dei ponti di Königsberg
(la città del filosofo Kant, in Prussia; oggi Kaliningrad, in Russia)



È possibile partire da A e ritornare in A attraversando tutti i ponti esattamente una volta?
Eulero dimostrò che no, dando con ciò inizio alla Teoria dei Grafi.



Definizioni preliminari

Che cos'è un grafo ? Definizioni.

Un grafo (semplice) $G = (V, E)$ è costituito da:

- un insieme V di nodi (o vertici, ingl. *vertices*, sing. *vertex*);
- un insieme E di archi (o spigoli, ingl. *edges*), ognuno dei quali è (costituito da) una coppia di nodi distinti, detti estremi dell'arco.

Vi sono due generi di grafi:

- non orientati (*undirected*): gli archi non hanno un verso, cioè, formalmente, sono coppie non ordinate;
- orientati (*directed*): gli archi hanno ciascuno un verso, cioè sono coppie ordinate; i due estremi sono detti:
  - nodo uscente o coda: è il primo elemento della coppia;
  - nodo entrante o testa: è il secondo elemento della coppia.

Definizioni

Secondo questa definizione, in un grafo non possono esistere:
- archi distinti (u, v) aventi
  - *grafo non orientato:* gli stessi estremi u e v;
  - *grafo orientato:* la stessa coda u e la stessa testa v;
- nessun arco della forma (v, v), cioè con estremi coincidenti.

Un insieme di archi distinti aventi gli stessi estremi (o, se orientati, le stesse coda e testa) viene detto multi-arco.
Un arco con estremi coincidenti viene detto cappio o loop.

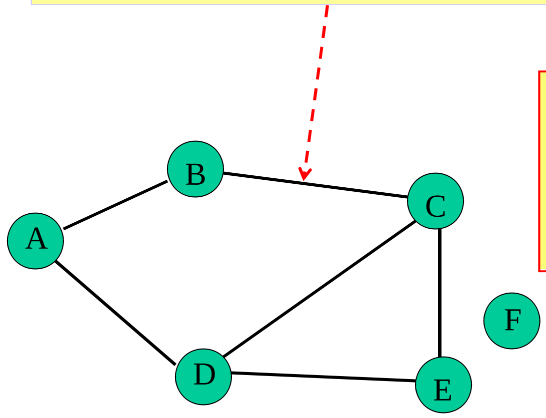
Un "grafo" in cui sono permessi i *multi-archi* e i *cappi* viene detto *multigrafo*. Matematicamente:

Un multigrafo G = (V, E) è costituito da:

- un insieme V di nodi o vertici;
- un multi-insieme E di archi, che sono coppie di nodi.

Esempio: grafo non orientato

(B, C) e **(C, B)** denotano lo stesso arco, che in realtà è l'insieme **{B, C}** ≡ **{C, B}**



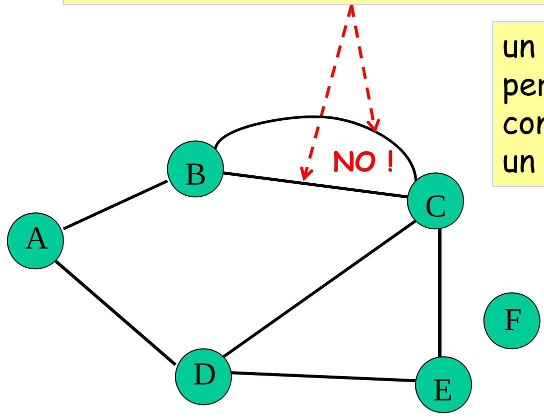
V **= {A, B, C, D, E, F}**

E **= {{A,B}, {A,D}, {B,C}, {C,D}, {C,E}, {D,E}}**

Esempio: multigrafo.

non possono esistere archi distinti
con gli stessi estremi

un "grafo" in cui sono
permessi archi distinti
con gli stessi estremi è
un multigrafo

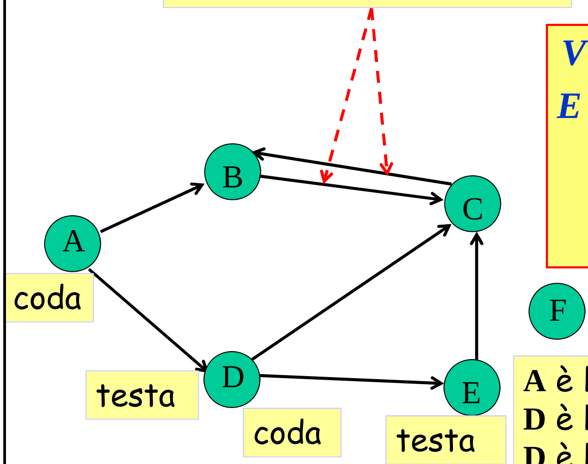


Esempio: grafo orientato

(B,C) e **(C,B)** denotano due
archi fra loro distinti

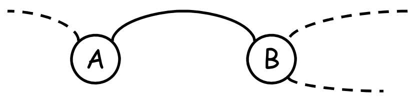
V **= {A, B, C, D, E, F}**

E **={(A,B), (A,D),**
(B,C), (C,B),
(D,C), (E,C),
(D,E)}

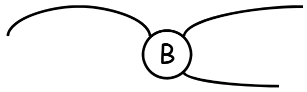


A è la coda dell'arco **(A,D)**
D è la testa dell'arco **(A,D)**
D è la coda dell'arco **(D,E)**
ecc.

Grafi non orientati: terminologia.

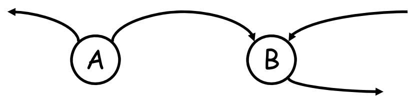


- l'arco {A, B} è incidente sui nodi A e B;
- i nodi A e B sono adiacenti:
  A è adiacente a B, B è adiacente ad A;
- i nodi adiacenti a un nodo A si chiamano anche i vicini di A;
- grado di un nodo = numero degli archi incidenti sul nodo;
  esempio: il nodo B ha grado $\delta(B) = 3$;



- è conveniente, nei grafi non orientati, considerare anche come uscenti da un nodo A tutti gli archi incidenti su A .

Grafi orientati: terminologia.



- l'arco (A, B) è:
  - incidente sui nodi A e B,
  - uscente da A, entrante in B;
- il nodo B è adiacente ad A, ma A <u>non</u> è adiacente a B.
- i nodi adiacenti a un nodo A si chiamano anche i vicini di A;
- grado di un nodo = numero degli archi incidenti sul nodo;
  - grado uscente = numero degli archi uscenti dal nodo;
  - grado entrante = numero degli archi entranti nel nodo;

  esempio: il nodo B ha:
  - grado uscente $\delta_{out}(B) = 1$, grado entrante $\delta_{in}(B) = 2$,
  - grado totale $\delta(B) = \delta_{out}(B) + \delta_{in}(B) = 3$,

Proprietà ovvie

In un grafo non orientato vi possono essere al più tanti archi quante sono le coppie non ordinate distinte di nodi.
In un grafo non orientato di n nodi vi sono quindi al più:

- n archi congiungenti il nodo 1 rispettivamente con ciascuno degli n nodi (incluso se stesso, se sono permessi i cappi);
- $n-1$ archi congiungenti il nodo 2 con ciascuno dei nodi $2,\dots, n$;
- $n-2$ archi congiungenti il nodo 3 con ciascuno dei nodi $3,\dots, n$;
- ecc.

Il numero di archi è quindi

$$m = O(n(n+1)/2) = O(n^2).$$

In un grafo orientato vi possono essere al più tanti archi quante sono le coppie ordinate distinte di nodi, cioè il numero di archi non supera la cardinalità del prodotto cartesiano $V\times V$:

$$m = O(|V\times V|) = O(n^2).$$

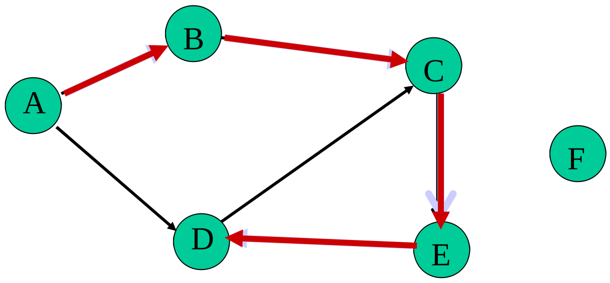
Grafi: terminologia (sommario).

- grafo aciclico = grafo privo di cicli.
- grafo orientato aciclico = directed acyclic graph = DAG = grafo orientato privo di cicli.
- il nodo v si dice raggiungibile dal nodo u se esiste un cammino da u a v;
- un grafo non orientato si dice connesso se ogni nodo è raggiungibile da ogni altro;
- un grafo orientato si dice fortemente connesso se ogni nodo è raggiungibile da ogni altro;
- un grafo orientato si dice debolmente connesso se il grafo non orientato che si ottiene da esso considerando gli archi come non orientati è connesso.

Nota:

un grafo connesso contenente n nodi deve contenere almeno $n-1$ archi.

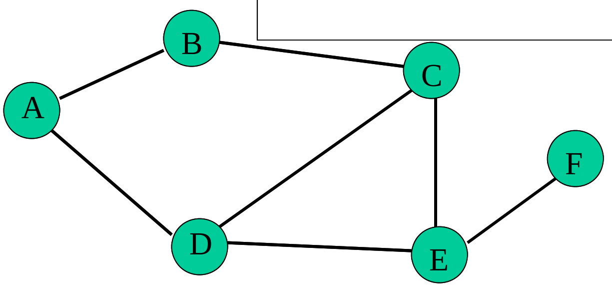
Es.: *D* è **raggiungibile** da *A* ma non viceversa



Definizione con esempio

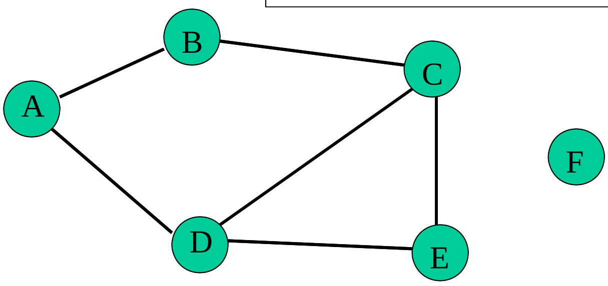
Se ***G*** è un ***grafo non orientato***, definiamo ***G*** **connesso** se esiste un ***cammino*** da ***ogni vertice*** ad ***ogni altro vertice***.

Ad es. questo grafo non orientato è **connesso**.



Esempio

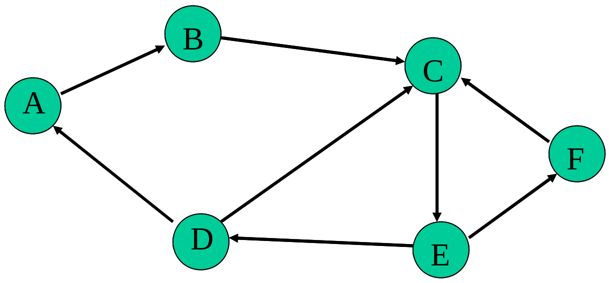
Questo grafo non orientato **NON** è connesso.



Definizione con esempio

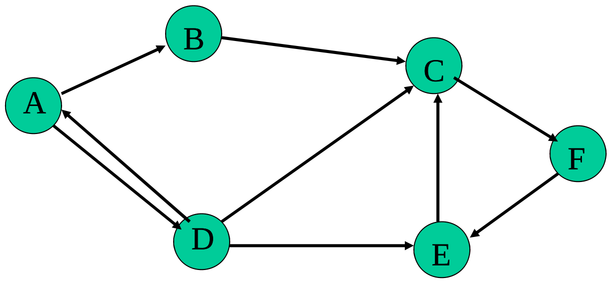
Se ***G*** è un ***grafo orientato***, definiamo ***G*** **fortemente connesso** se esiste un ***cammino*** da ***ogni vertice*** ad ***ogni altro vertice***.

Ad es. questo grafo orientato è **fortemente connesso**.



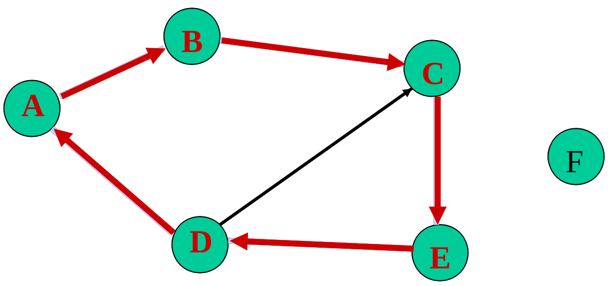
Esempio

Ad es. questo grafo orientato NON è fortemente connesso.
Infatti, ***non esiste cammino da*** **C** ***a*** **B**, *né* ***da*** **E** ***ad*** **A**, ***ecc.***
Tuttavia è debolmente connesso.



Definizione

Un **ciclo** in un grafo orientato è un cammino $\langle w_1, w_2, \ldots, w_n \rangle$ di lunghezza ≥ 1, tale che $w_1 = w_n$.

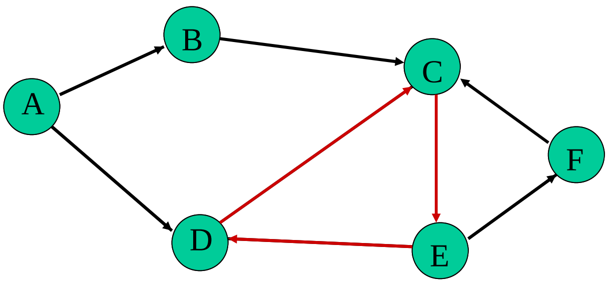


il cammino $\langle$ **A, B, C, E, D, A** $\rangle$ ***è un ciclo;***
il cammino nullo $\langle$ A $\rangle$ ***NON è un ciclo*** (perché ha lunghezza 0)

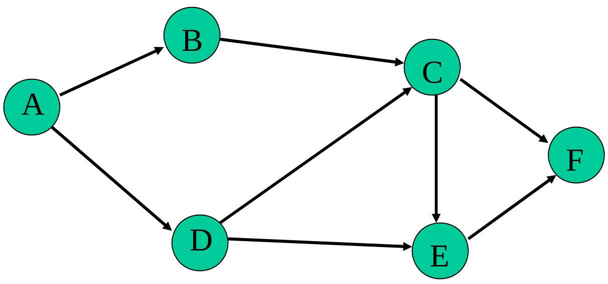
Definizione con esempio

grafo aciclico = grafo senza cicli

Ad es. questo grafo orientato ***non è aciclico***, …



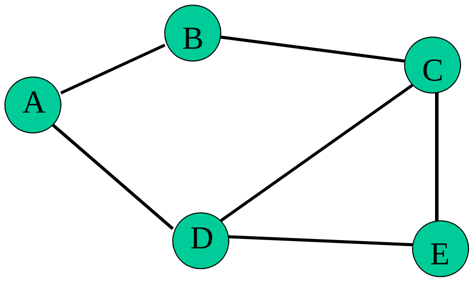
Un ***grafo orientato aciclico*** è spesso chiamato **DAG** (***D**irected **A**cyclic **G**raph*).



Definizione con esempio

Un **grafo completo** è un grafo che ha un ***arco tra ogni coppia di vertici distinti.***

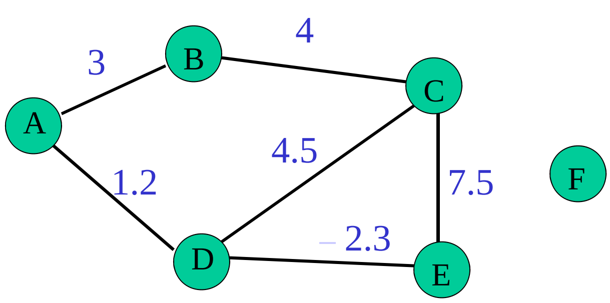
Ad es. questo grafo **NON** è completo



Un grafo completo avente n nodi ha n(n-1)/2 archi.

Definizione con esempio.

grafo pesato: ad ogni arco è associato un peso, costituito da un numero reale.

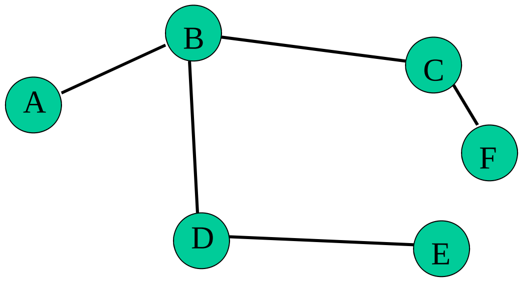


Grafi e alberi: terminologia

albero libero = grafo non orientato, connesso, aciclico.

La definizione è sensata, poiché se in un albero libero si designa un nodo qualunque v come radice, si ottiene un albero nel senso usuale, avente v come radice.

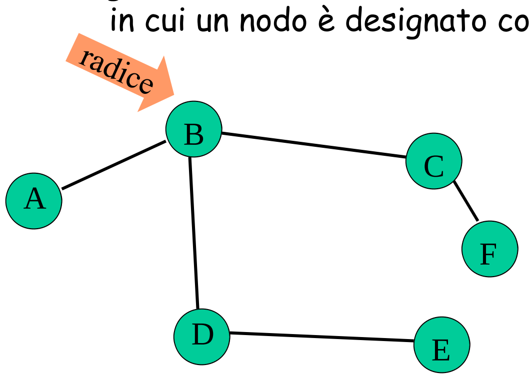
Nota. Qualunque nodo può funzionare da radice: per qualunque dei nodi si "appenda" il grafo, si ottiene sempre un albero.



Grafi e alberi: terminologia

Un albero nel senso usuale viene detto più propriamente *albero radicato*; quindi:

albero radicato = grafo non orientato, connesso, aciclico, in cui un nodo è designato come radice.



Grafi e alberi: terminologia.

Un albero radicato può anche essere definito come un genere particolare di grafo orientato aciclico (dag):

albero radicato = grafo orientato aciclico (dag) in cui:

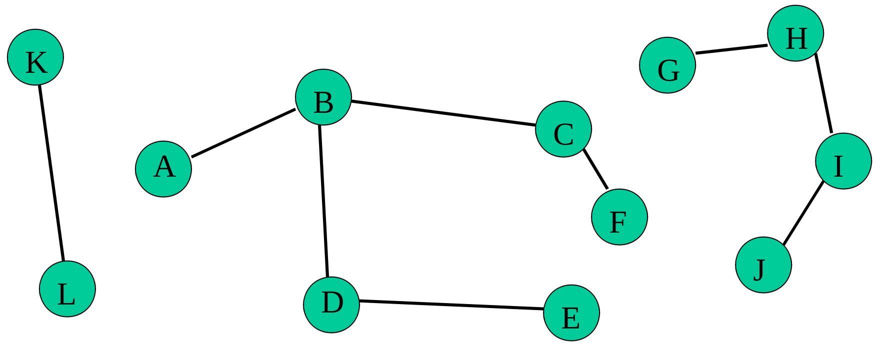
- uno e un solo nodo, detto radice, ha grado entrante 0;
- tutti gli altri nodi hanno grado entrante 1.

Ogni albero radicato secondo la definizione della slide precedente può essere considerato, attribuendo agli archi l'ovvio orientamento, un albero radicato nel secondo senso.

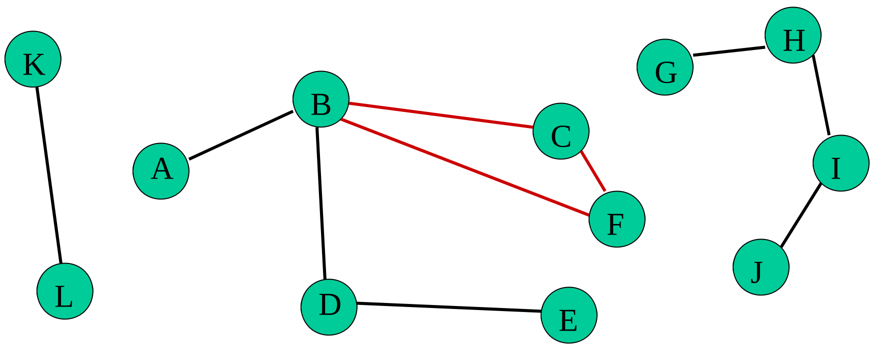
Grafi e alberi: terminologia.

Come è naturale, un ***grafo non orientato aciclico*** ma ***non connesso*** viene detto ***foresta (libera)***.

Ad es. questa è una ***foresta***. Contiene tre alberi liberi.



Questo ***grafo contiene un ciclo***.
Perciò ***non è né*** un ***albero libero né*** una ***foresta***.



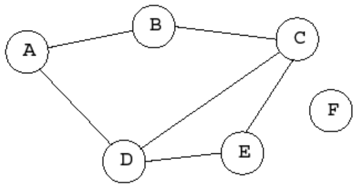
Rappresentazione

- liste di adiacenza:
  per ogni nodo si tiene la lista dei nodi ad esso adiacenti;
  se oltre ai nodi vengono rappresentati esplicitamente anche gli archi, si parla talora più precisamente di
- liste di incidenza:
  - grafo non orientato: per ogni nodo si tiene la lista degli archi incidenti su di esso;
  - grafo orientato: per ogni nodo si tiene la lista degli archi uscenti da esso.

Il termine *liste di adiacenza* è però usato in generale anche nel secondo caso.

- matrice di adiacenza:
  matrice quadrata M di dimensione $n \times n$, dove
  $M_{ij} = 1$ se (v_i, v_j) è un arco, altrimenti 0.

Rappresentazione: matrice di adiacenza, grafo non orientato

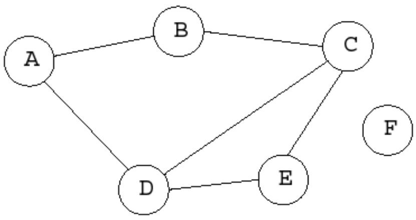


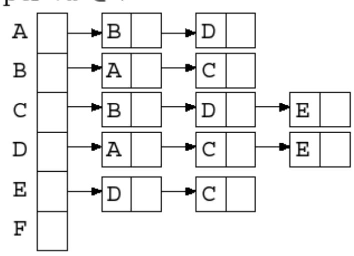
$$M(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|} A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ D & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ E & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

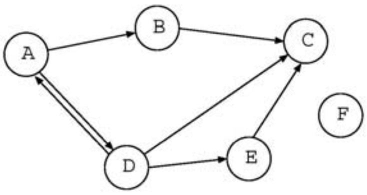
Rappresentazione: lista di adiacenza, grafo non orientato

$L(x) =$ lista di y, tale che $(x,y) \in E$ per $\forall x \in V$





Rappresentazione: matrice di adiacenza, grafo orientato

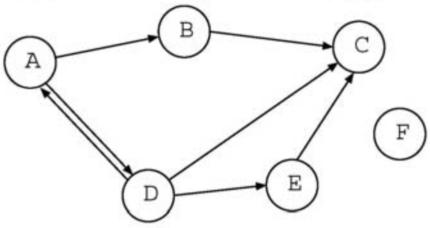


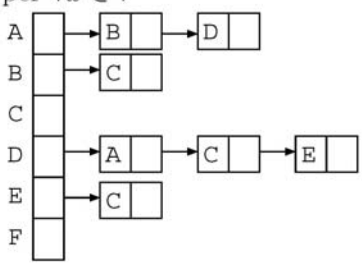
$$M(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|} A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ E & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

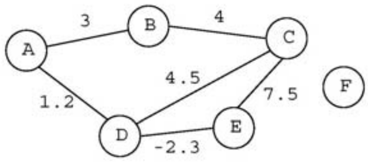
Rappresentazione: lista di adiacenza, grafo orientato

$L(x) =$ lista di y, tale che $(x,y) \in E$ per $\forall x \in V$





Rappresentazione: matrice di adiacenza, grafo pesato

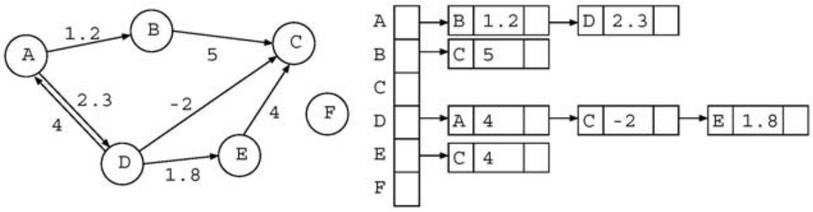


$M(x,y) = W(x,y)$

$$\begin{array}{c|cccccc|} A & 0 & 3 & 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ B & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 4 & 0 & 4.5 & 7.5 & 0 \\ D & 1.2 & 0 & 4.5 & 0 & -2.3 & 0 \\ E & 0 & 0 & 7.5 & -2.3 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Rappresentazione: lista di adiacenza, grafo pesato

$L(x) =$ lista di $W(x,y)$, tale che $W(x,y) \neq 0$ per $\forall x \in V$



Rappresentazione: possibili operazioni, grafo non orientato

in caso di lista di adiacenza:

operazione	**tempo di esecuzione**
grado(x)	$O(\delta(x))$
archiIncidenti(x)	$O(\delta(x))$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(\min(\delta(x), \delta(y)))$
aggiungiVertice(x)	$O(1)$
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$
rimuoviVertice(x)	$O(m)$
rimuoviArco(x, y)	$O(\delta(x) + \delta(y))$

Rappresentazione: possibili operazioni, grafo non orientato

in caso di matrice di adiacenza:

operazione	**tempo di esecuzione**
grado(x)	$O(n)$
archiIncidenti(x)	$O(n)$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(1)$
aggiungiVertice(x)	$O(n^2)$
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$
rimuoviVertice(x)	$O(n^2)$
rimuoviArco(x, y)	$O(1)$